MAT 1080

2.7

Made with Goodnotes

2.7 L'Hôpitals regel

Skal beregne grenseverdien $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Hva gjør vi hvis f eller g, eller begge, nærmer seg 0 når $x \to a$?

Hvis $f(x) \to 0$ og $g(x) \to b \neq 0$, vil

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0.$$

Hvis $f(x) \to b \neq 0$ og $g(x) \to 0$, vil

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty.$$

Men hva med "$\frac{0}{0}$"-tilfellet?
Her kan evt. L'Hôpitals regel hjelpe oss.

Made with Goodnotes

Teorem 2.7.1 (L'Hôpitals regel)

Anta at $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

eller $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$,

Da er $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

forutsatt at den siste grensen eksisterer.
(Den kan være $\pm \infty$)

Eks: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x}$ så "$\frac{0}{0}$".

$f(x) = 1 - e^x \Rightarrow f'(x) = -e^x$

$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{1} = -1$$

så $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x} = -1$.

Made with Goodnotes

Videre: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$ så "$\frac{\infty}{\infty}$"

Her vil vi "gjette" at grenseverdi er ∞.

Men bevis:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty \text{ , så}$$

da er $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$.

Eks:

$$\lim_{x\to 0} x \ln|x|$$

Her: $x \to 0$, men $\ln|x| \to -\infty$. Kan skrive om:

$$\lim_{x\to 0} x \ln|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \text{ så "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\to = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

L'Hôpital

Made with Goodnotes

Ehs: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ si $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

Made with Goodnotes