MAT 1080

3.4

3.4 Kritiska punkter

Def 3.4.1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $x = (x_1, x_2)$ kallas ett **kritisk punkt** dersom $\nabla f(x) = 0$ eller minst en partiell derivata inte existerar i x.

Ex: $f(x,y) = \sin\left(\pi \sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\pi y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Kritisk punkt när $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ ty då $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. $(0,0)$ också kritisk ty part. der. inte existera (inte så lätt att se!)

Made with Goodnotes

Som för en hemsidan med kritiska punkter
å vara kandidaten för extremalpunkten.

Teorem 3.4.2 Hvis (a,b) er et
ekstremalpunkt for f, så er (a,b)
et kritisk punkt.

Bevis: Anta f har part. der. i (a,b)
Men da må $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ ved
en variabel teori, se på $x \to f(x,b)$.
Tilsvarende er $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, så
$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = (0,0)$ ∎

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = x^2 - y^2$

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Made with Goodnotes

Stn kritiska punkter på f och g!

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$, $\nabla g(x,y) = (2x, -2y)$

Så $\nabla f(0,0) = \nabla g(0,0) = (0,0)$

och $(0,0)$ är kritisk punkt för både f och g.

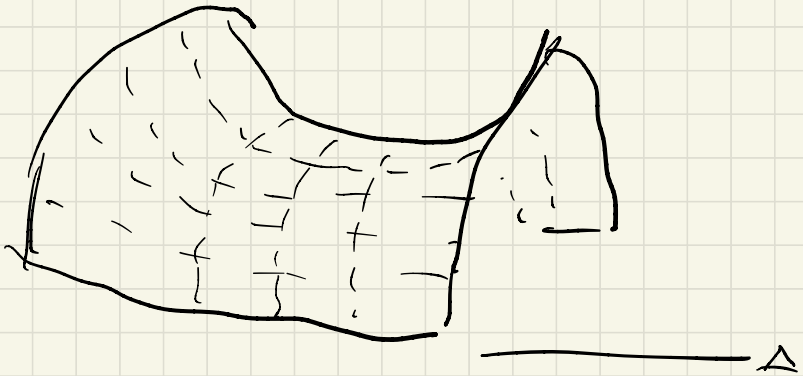
Har sett att $(0,0)$ är (globalt) min.punkt för f, ideet $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$.

Hur med g?

- Om $y = 0$, så $g(x,0) = x^2$
  Så $(0,0)$ ger minimum på x-axeln):
  för restriktionen av g till $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$.
- Om $x = 0$, så $g(0,y) = -y^2$
  Så $(0,0)$ ger maximum på y-axeln):
  för restriktionen av g till $\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Made with Goodnotes

Så: $(0,0)$ är sadelpunkt för g



Generellt när $\nabla f(a,b) = (0,0)$:

Tre möjligheter:

- lokalt min.-punkt
- lokalt max.-punkt
- sadelpunkt

Hurdan avgöra vilken typ?

Använd andraderivatatesten →

Made with Goodnotes

La $$H_f(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Kallas Hessematrisen till f i (a,b), och tillhörande Hessa-determinant är

$$H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

Teorem 3.4.3 Anta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är två gånger partiellt deriverbar i (a,b), och att (a,b) är en kritisk punkt.

- $H(a,b) > 0$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \Rightarrow$ lokalt min
- $H(a,b) > 0$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0 \Rightarrow$ lokalt max
- $H(a,b) < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt.

Made with Goodnotes

NB: Hvis $H(a,b)=0$, sier ikke testen noe.

Eks: $g(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H(x,y) = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ sadelpunkt.

For $f(x,y) = x^2 + y^2$ får vi

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ og

$H(x,y) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$, og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$,

så lokalt min punkt (og globalt)

Made with Goodnotes