MAT 1080

4.2

4.2 Ubestemt integrasjon

Har: funksjon f $\rightarrow$ deriverbar funksjon f'

motsatt: ubestemt integrasjon

Def. 4.2.1 Dersom F er en funksjon med deriverbar $F' = f$ d.v.s. $F'(x) = f(x)$ for alle x (i def. området), så kalles F en anti-deriverbar av f og vi skriver

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

der C er en konstant. Kalles $F(x)+C$, for varierende C, for det ubestemte integralet av f.

dx kalles et differensial, og angir variabelen som brukes

Made with Goodnotes

Notasjonen $\int f(x)\,dx$ er "fin" fordi den antyder

$$\int \downarrow \sum f(x)\cdot \Delta x$$

som vi vender tilbake til.

Merk:

- anhvor f har bare én anti-deriverte, opp til en (additiv) konstant s.:

$$F_1' = F_2' = f \Rightarrow F_1 = F_2 + C$$

for en C.

- spesielt: hvis $f = 0$ s.: $f(x) = 0$ for alle x, så er de anti-deriverte de konstante funksjonene

$$\int f(x)\,dx = C$$

Linearitet: Viktig egenskap

(i.) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(ii) $\int (c\,f(x))\,dx = c \int f(x)\,dx$

Made with Goodnotes

Ehs: $\int 1\,dx = x + C$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int (x^3 + 5x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \int x^3\,dx + 5\int x^2\,dx - 2\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 5\cdot\frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Made with Goodnotes

Klart at: $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Minner om produktregel for derivasjon:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ved å integrere på begge sider får vi en nyttig regel (vi dropper konstanten her)

$$\Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \int (f \cdot g)'\,dx = \int f' \cdot g\,dx + \int f \cdot g'\,dx$$

Flytter om:

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx + C}$$

Dette kalles delvis integrasjon.

Kan brukes til å bestemme mer kompliserte integraler.

Made with Goodnotes

Eks:

$f'(x) = \sin x$, $g(x) = x$

$\Rightarrow f(x) = -\cos x$

g f'

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Kan sjekke dette:

$$(-x\cos x + \sin x + C)' = -(1\cdot\cos x - x\sin x) + \cos x$$

$$= -\cos x + x\sin x + \cos x$$

$$= x\sin x \qquad \text{OK!}$$

Eks:

$$\int \ln x = ?$$

Made with Goodnotes

$$\int \ln x = \int \overset{f'}{1} \cdot \overset{g}{\ln x} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \cdot dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

Eks: $$\int \overset{f'}{x} \overset{g}{\ln x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Sa: Poenget er å velge (om mulig) f og g slik at

$$\int f(x) g'(x)\, dx$$

er "enkelt".

Made with Goodnotes

Substitusjon er en annen nyttig regel:

$$\boxed{\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) + C}$$

fordi $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ved kjerneregelen.

Eks:

$$\int x \sin(x^2+3)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x)\sin(x^2+3)\,dx \quad \Big| \quad \begin{matrix} f'(y) = \sin y \\ g(x) = x^2+3 \end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2+3) + C$$

Sjekk: $\left(-\frac{1}{2}\cos(x^2+3)\right)' = \frac{1}{2}\sin(x^2+3)) \cdot 2x$

Begge disse teknikkene krever en del trening!

Made with Goodnotes