MAT 1080

4.4

4.4 Fundamentalteoremet

Dette viktige resultatet forbinder integrasjon og derivasjon, og åpner for å beregne mange integraler mykså greit.

Teorem 4.4.1 La f være en kontinuerlig funksjon på et intervall $[a, b]$ og la F være en anti-derivert til f.

Da er

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

og

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

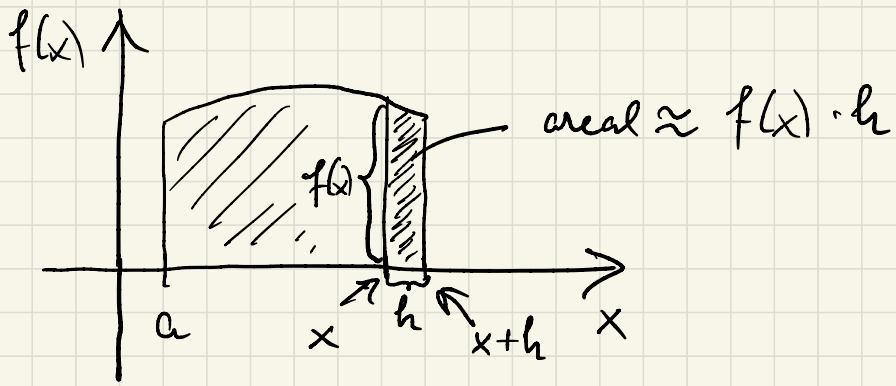
Kalles fundamentalteoremet for differensial- og integralregning.

Made with Goodnotes

NB: Skriver gjerne $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Husk over: $\frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$.

Tolkning/idé bak bevis:



La $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ = areal fram til x

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x).$$

Made with Goodnotes

Ehs: Kan bregne mange integraler:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a$$

$$\int_a^b e^{kx} dx = \frac{1}{k}\left(e^{kb} - e^{ka}\right)$$

$$\int_a^b \sin x \, dx = -\cos b + \cos a$$

$$\int_a^b \cos x \, dx = \sin b - \sin a$$

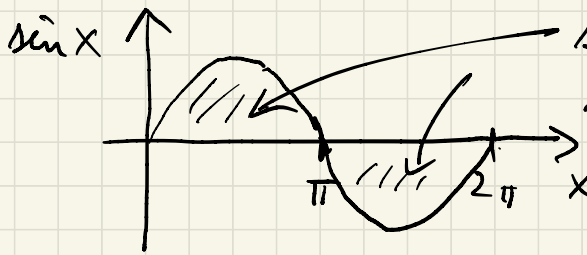
Ehs

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0$$

$$= -1 + 1 = 0$$

Made with Goodnotes

ser at dette stemmer:



samme areal, men tell negativt fordi $\sin x \leq 0$ her.

Substitusjonsmetoden for bestemte integraler:

$$\textcircled{*} \quad \int_a^b f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(b)) - f(g(a))$$

fordi $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ved kjerneregelen. Så $f \circ g$ er anti-deriverte til $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Så brukte vi fundamentalteoremet.

Made with Goodnotes

Kan också tänka på ⊛ som ett variabelskifte

$$I = \int_a^b f'(g(x))\,g'(x)\,dx$$

Ny ny variabel

$u = g(x)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x)$

Tillåter oss då att skriva

$$du = g'(x)\,dx$$

där du och dx är "differentialer" (oändligt små storheter) som liknar på $\Delta u \approx g'(x)\,\Delta x$ för liten Δx. Då får vi

$$I = \int_a^b \underbrace{f'(g(x))}_{f'(u)}\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du}$$

Nära $x = a$ är $u = g(a)$, och för $x = b$ är $u = g(b)$

Så vi får: $\int_{g(a)}^{g(b)} f'(u)\,du = f(g(b)) - f(g(a))$

Made with Goodnotes

Ehs: $I = \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right) x \, dx$

La $u = \frac{\pi}{2}x^2$. Så, $du = \frac{\pi}{2} \cdot 2x \, dx$
$= \pi x \, dx$

Skranker: $x = 0 \Rightarrow u = 0$
$x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$.

Så

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u) \frac{1}{\pi} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{\pi}$$

Made with Goodnotes

Delvis integrasjon:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_c^b f'(x)g(x)\,dx$$

Eks:

$$\int_0^\pi \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\cos x}\,dx = \left[x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\sin x}\,dx$$

$$= \pi\sin\pi - 0\sin 0 - \left[-\cos x\right]_0^\pi$$

$$= 0 - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$$

Til slutt noh et eksempel på substitusjon.

Made with Goodnotes

Eks: $I = \int \sin\sqrt{x}\, dx$ (ubestemt int)

Prøver $u = \sqrt{x}$, så $u^2 = x$. Tenker på x som funksjon av u:

$$\frac{dx}{du} = 2u \Rightarrow dx = 2u\, du$$

Så

$$I = \int (\sin u)\, 2u\, du$$

$$= 2\int \underbrace{u}_{f}\cdot\underbrace{\sin u}_{g'}\, du$$

BRUKER DELVIS INT.

$$= 2\, \underbrace{u}_{f}\,\underbrace{(-\cos u)}_{g} - 2\int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{(-\cos u)}_{g}\, du$$

$$= -2u\cos u + 2\int \cos u\, du$$

$$= -2u\cos u + 2\sin u$$

$$I = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

Made with Goodnotes