MAT 1080

4.5

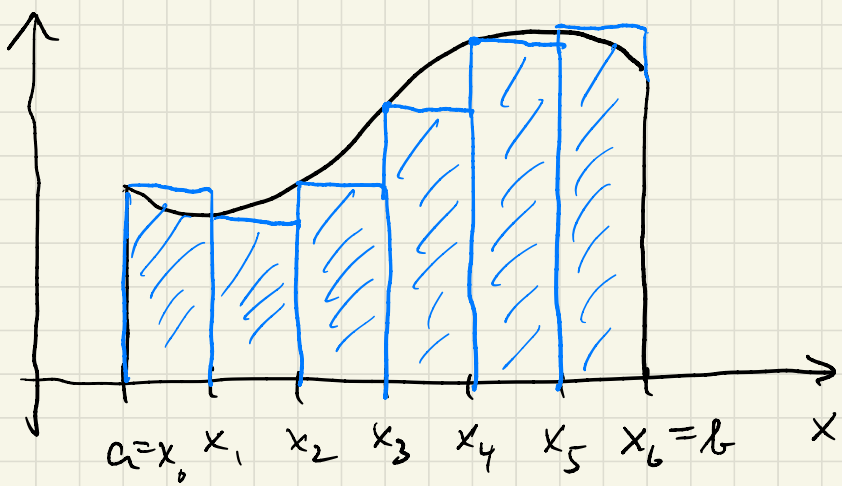
Made with Goodnotes

4.5 Riemannsummer

Skal approksimere areal under grafen til f med rektangler og sum av deres areal.

Stammer fra B. Riemann (1826 - 1866)

Se på $\int_a^b f(x)\,dx$



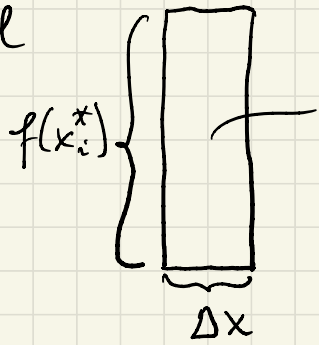
Velger $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

gjerne ekvidistant: $x_{i+1} - x_i = \Delta x = \text{fast}$

Velg $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ f.eks $x_i^* = x_i$

Made with Goodnotes

i'te rektangel



Så: summen av disse arealene (lett å beregne) approksimerer integralet = areal under kurven:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0} f(x_i^*) \cdot \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x}$$

Faktisk har vi ofte

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\,(x_{i+1} - x_i)$$

Denne betraktningen er utgangspunkt for en formell definisjon av integralet: faktisk ser man på rektangler under

Made with Goodnotes

kurven, og rektanglene over kurven. Så lager man finere og finere oppdelinger og ser om de to grenseverdiene faller sammen: da definerer dette som (Riemann-) integralet.

Så:

- dette gir en ryddig definisjon av integralet
- og gjør det mulig å beregne integralen numerisk (tilnærmet) på datamaskin
- for håndregning er dette ikke en praktisk metode

Eks: Heftet

$$\int_0^1 x^2\,dx : \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Made with Goodnotes

Made with Goodnotes

Made with Goodnotes