MAT 1080

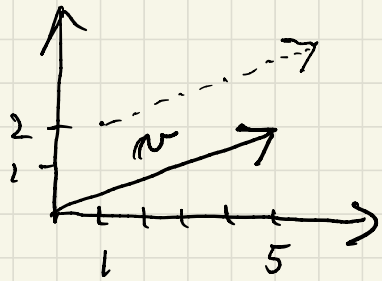
5.1

KAP 5 VEKTORER, MATRISER OG LINEÆRE LIKNINGER

5.1 Vektorer

I lineær algebra studerer man vektorer og matriser, og tilknyttede begreper og spørsmål.

Vektor: Kan tenke på det som en pil i plan (eller rommet), med retning og lengde



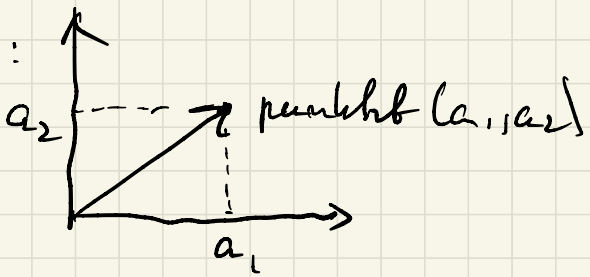
NB: Plassering uten betydning → kan tegne med ulike startpunkt

Made with Goodnotes

Mer praktiskt att tänka på en vektor som ett par (a_1, a_2) i $\mathbb{R}^2$, eller i högre dimension, ett n-tuppel

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Så geometriskt:



och vi skiller ikke mellom punkten (a_1, a_2) og vektoren $v = (a_1, a_2)$.

Skrivemåte: v (fet skrift), eller v eller $\vec{v}$

Lengde: Lengden av vektoren $v = (a_1, a_2)$ er definert som $\|v\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Ved Pythagoras er dette lengden av hypotenusen i trekanten over.

Made with Goodnotes

I $\mathbb{R}^n$: Lengden av vektoren $\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)$ er

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Eks:

$$\|(1,2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\|(3,1,0,-2)\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{14}$$

Merk:

$$\|\vec{v}\| \geq 0 \quad \text{for alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^n$ er mengden av n-tuplen, og kalles vektorer med n komponenter.

Når er $\|\vec{v}\| = 0$? Bare når

$\vec{v} = (0, 0, \dots, 0)$: nullvektoren

Vi trenger regneoperasjoner for vektorer.

Made with Goodnotes

I. Vektoraddisjon: gjøres komponentvis

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

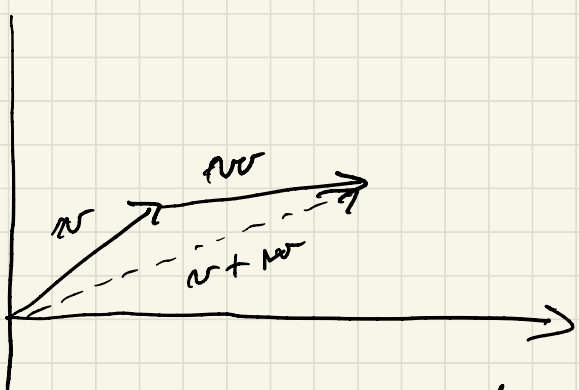
Eks: $(1,2,3) + (-1,0,5) = (1-1, 2+0, 3+5) = (0,2,8)$

II. Multiplikasjon med skalar: også komponentvis

$$t \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1 \cdot t, a_2 \cdot t, \dots, a_n \cdot t)$$

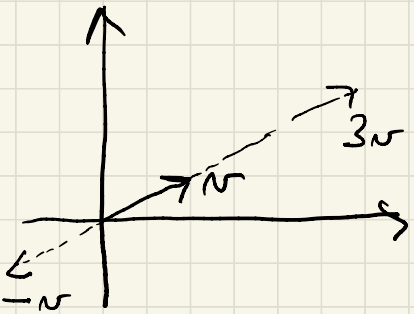
Eks $2 \cdot (1,2) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = (2,4)$

Geometrisk:





Made with Goodnotes



Så mengden $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$, når $v \neq 0$, er en linje, med retningsvektor v

Regnregler:

1.) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (n-dim. vektorer)

a) $x + y = y + x$

b) $(x+y)+z = x+(y+z)$

Derfor kan vi skrive $x+y+z$

Generelt: $x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(k)}$

(uansett hvordan man setter parentesen i utregning får man samme svar)

Made with Goodnotes

Speciella vektorer:

a) $0 = (0, 0, \ldots, 0)$: nollvektorn

$\Rightarrow a + 0 = a$ og $t \cdot 0 = 0$

b) standard enhetsvektorer (dvs $n = 4$)

$e_1 = (1, 0, 0, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, 0)$

$e_3 = (0, 0, 1, 0)$

$e_4 = (0, 0, 0, 1)$

Rad- og kolonnevektor

vi kan representera vektorn $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ med radvektorn

$$[a_1 \; a_2 \cdots a_n]$$

eller kolonnevektorn

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Made with Goodnotes

Begge disse er matriser (mer i neste seksjon).

Nå kommer to svært viktige begrep i lineær algebra.

Lineær kombinasjon av vektorene $v_1, v_2, \dots, v_m$ er en vektor på formen

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$$

der $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$

f. eks. $m = 3$

$v_1 + v_2 + v_3$

$2v_1 - v_2 \quad (= 2v_1 + (-1)v_2)$

$\sqrt{3} v_1 + 7 v_3$

Når vi har koordinatene (komponentene) til hver v_i kan vi regne ut f. eks. $2v_1 - v_2$. Men ofte jobber vi uten å regne ut.

Made with Goodnotes

Så begrepet som kan være vanskelig:

Lineært uavhengig: En liste med vektorer $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ($i \mathbb{R}^n$) sies å være lineært uavhengig dersom $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$ medfører at hver $a_i = 0$. Motsatt: lineært avhengig.

Hvordan tenke på dette?

a) Likningen: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0$ er en likning i ukjente $a_1, a_2, \ldots, a_m$, og med n likninger (én for hver komponent)

Så eneste løsning er $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ når $v_1, v_2, \ldots, v_m$ er lineært uavh.

b) Lin. uavh. betyr at eneste måte å få 0-vektoren som lineærkombinasjon

Made with Goodnotes

är den trivialla mätan

$$0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_m .$$

Ekv: • Låt

$$v_1 = (1, -2, 3), \; v_2 = (1, 2, 1), \; v_3 = (-1, 0, -2)$$

Då är

$$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$$

så v_1, v_2, v_3 är linjärt avhängiga.

• Låt $v_1 = (1, 3)$ och $v_2 = (4, 5)$

Anta $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$:

$$a_1(1, 3) + a_2(4, 5) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \; a_1 + 4a_2 = 0 \;, \; 3a_1 + 5a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \; a_1 = -4a_2 \;, \; 3(-4a_2) + 5a_2 = 0$$

$$\Rightarrow \; a_2 = 0 \;, \; a_1 = 0$$

Så: v_1, v_2 är linjärt oavhängiga.

Made with Goodnotes