MAT 1080

5.2

5.2 Matriser

Def 5.2.1 En reell $m \times n$ **matrise** A er en rektangulær tabell med tall, med m vannrette **rader** og n loddrette kolonner:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vi skriver $A = [a_{ij}]$ og a_{ij} er **elementet** i rad i og kolonne j.

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$: 2×3 matrise

Made with Goodnotes

Så: en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$ er en $n \times 1$ matrise, og en radvektor i $\mathbb{R}^n$ er en $1 \times n$ matrise.

Regneoperasjoner: Addisjon og multiplikasjon med skalar gjøres komponentvis, som for vektorer. Så

$A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$, begge $m \times n$

$\Rightarrow A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

$t \in \mathbb{R}$: $tA = [t a_{ij}]$

Eks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Made with Goodnotes

NB: Vi skriver $A-B$ (for matriser med samme dimensjon) og mener da

$$A + (-1)\cdot B$$

Noen egenskaper

Proposisjon 5.2.3 La A, B, C være reelle $m \times n$ matriser. Da er

i) $(A+B)+C = A+(B+C)$
(assosiativ lov)

ii) $A+B = B+A$
(kommutativ lov)

iii) $A+0 = A$, der 0 er nullmatrisen (alle elementer er 0)

iv) $A+(-A) = A-A = 0$
(additiv invers)

Made with Goodnotes

v) $c(dA) = (cd)A$

vi) $c(A+B) = cA + cB$

(distributiv lov)

vii) $1 \cdot A = A$

Alt dette er lett å vise.

Nå kommer en ny regneoperasjon, og denne er mer komplisert.

Matrisemultiplikasjon

Se først på multiplikasjon av en matrise med en kolonnevektor:

La A være $m \times n$ matrise, og x en kolonnevektor i $\mathbb{R}^n$ (x: $n \times 1$ matrise)

Made with Goodnotes

Da definerer vi

$$Ax = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

der $A = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$ d.v.s.

j'te kolonne i A er v_j.

NB: Så Ax er en lineær kombinasjon av kolonnene i A, med koeffisienter som er elementene i x.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2\ v_3]$

La $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da er

$$Ax = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Made with Goodnotes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = [v_1 \; v_2 \; v_3]$$

La nå $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Da er

$$Ax = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 v_3 = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Generelt er Ae_j = j'te kolonne i A, der e_j er j'te standard enhetsvektor.

Merk dimensjonene: Ax er definert for $A : m \times n$ og $x : n \times 1$ (like)

Videre: Vil definere matriseprodukt AB der $A : m \times n$, og $B : n \times p$ (like)

Made with Goodnotes

La $B = [w_1\ w_2\ \cdots\ w_p]$ være "kolonnepartisjonen" av B så w_j er j'te kolonne i B. Da definerer vi

$$AB = A[w_1\ w_2\ \cdots\ w_p]$$
$$= [Aw_1\ Aw_2\ \cdots\ Aw_p]$$

så A "ganges inn på hvert ledd".

Merk at Aw_1 osv. er definert fra: matrise ganget med kolonnevektor.

Dette gir god innsikt i matrise-multiplikasjon. Men en nyttig regneregel er følgende:

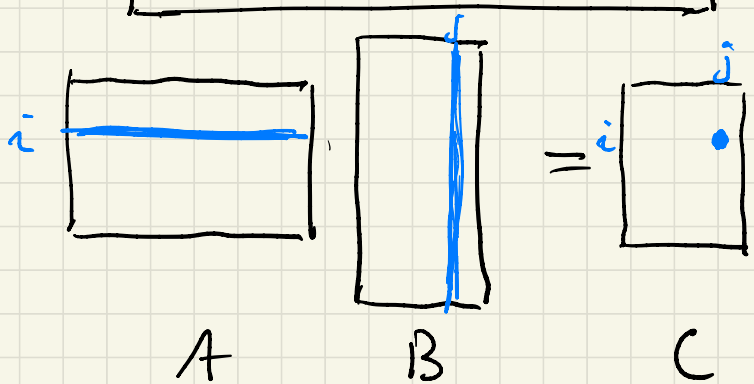
Made with Goodnotes

Regel: La $A = [a_{ij}] : m \times n$ og

$B = [b_{ij}] : n \times p$.

Da er $C = AB = [c_{ij}]$ gitt ved

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i \le m, \ j \le p)$$



c_{ij} = skalarprodukt (prikkprod.) av rad i i A og kolonne j i B.

Husk: skalarprodukt $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Made with Goodnotes

Eks → $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Regneregler

Proposisjon 5.2.6 A, B, C matriser med dimensjoner slik at "meningsfylt":

(i) $(AB)C = A(BC)$ (assosiativ lov)

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ } (distributiv lov)
$(A+B)C = AC + BC$ }

Følger fra definisjonen.

Si, f. eks $A_1 A_2 A_3 A_4$ har mening (uansett hvordan vi setter parentesen: samme svar)

Made with Goodnotes

Så matrisemult. følger stort sett samme regler som multiplikasjon av tall.

MEN: Følgende holder ikke generelt

$$AB = BA$$

Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessuten: ikke sikkert BA har mening selv om AB har det, f.eks.

$$\underset{2\times 3}{A}\ \underset{3\times 4}{B} \Rightarrow \underset{3\times 4}{B}\ \underset{2\times 3}{A}$$

↑↑ ulike, så BA ikke definert

Made with Goodnotes