MAT 1080

5.3

# 5.3 Kvadratiske matriser

Matrisa, dimensjon (størrelse): $m \times n$ generelt. Hvis $m = n$, kvadratisk matrise.

Viktig i anvendelser, og mange egenskaper. Ser nå bare på kvadratiske matriser.

**Identitetsmatrisen:**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix} = [a_{ij}] \text{ der}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Vi sier at enerne er på hoveddiagonalen.

Egenskap: $\boxed{A I_n = I_n A = A}$



Made with Goodnotes

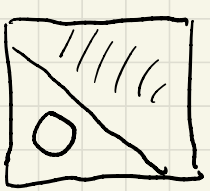
Diagonalmatrise: kvadr. matrise med bare nuller utenfor hoveddiagonalen:
$A = [a_{ij}]$ der $a_{ij} = 0$ når $i \neq j$.

For diagonalmatriser $A$ og $B$, $n \times n$ er matrisemultiplikasjon enkelt

$C = AB \Rightarrow c_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii}$, og

$C$ er også diagonalmatrise. Dessuten:
$AB = BA$ her. Det gjelder ikke for generelle matriser, som nevnt.

Øvre triangulær matrise



0-er under hoveddiagonalen

Nedre triangulær:  0-er over



Made with Goodnotes

Invertible matriser: For tall ulik 0 har vi en multiplikativ invers, f.eks 3 har $\frac{1}{3}$ fordi $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Generelt: $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ er slik at $a \cdot a^{-1} = 1$.

Skal se på tilsvarende begrep for kvadratiske matriser

Def. 5.3.2 La $A$ være $n \times n$ matrise. Dersom det finnes en $n \times n$ matrise $B$ slik at

$$AB = BA = I_n$$

sier vi at $A$ er invertibel og at $B$ er den inverse matrisen til $A$. Skriver da $B = A^{-1}$.

---

Merk: Nok å sjekke $AB = I_n$.



Made with Goodnotes

Eks: 1.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. La $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Da er

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

(og da er $BA = I_2$) så $A$ er invertibel og $B = A^{-1}$.

2.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Da er $A$ ikke invertibel. Viser dette ved å prøve å finne $B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $b_{11} + 2b_{21} = 1$, $b_{12} + 2b_{22} = 0$

$2b_{11} + 4b_{21} = 0$, $2b_{12} + 4b_{22} = 1$

$\hookrightarrow$ $b_{11} + 2b_{21} = 1$ og $b_{11} + 2b_{21} = 0$

UMULIG!



Made with Goodnotes

**Proposisjon 5.3.3** La $A$ og $B$ være inverstibler $n \times n$ matriser. Da er

(i) Den inverse matrisen er entydig bestemt av $A$.

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$, så $A^{-1}$ er inverstibel og har invers $A$.

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (NB: rekkefølge byttes!)

Bevis: (i) Anta $C_1, C_2$ begge inverser til $A$.

$$C_1 = C_1 I_n = C_1(\underbrace{AC_2}_{I_n}) = (\underbrace{C_1 A}_{I_n})C_2 = I_n C_2 = C_2$$

(ii) $A^{-1}A = I \Rightarrow A^{-1}$ inv. og $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{BB^{-1}}_{I}A^{-1} = AA^{-1} = I$

■



Made with Goodnotes

Eks. La $A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix}$ være

en diagonalmatrise. Da er $A$ invertibel hvis og bare hvis

$$a_i \neq 0 \quad \text{for alle } i.$$

I så fall er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & 0 \\ & a_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Så: enkelt for diagonalmatriser.

Transponert matrise: Bytte rader og kolonner, skriver $A^T$. Har også mening for rektangulære matriser.



Made with Goodnotes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

så: $A : m \times n$ gir $A^T : n \times m$

1. kolonne i $A^T$ er 1. rad i $A$ osv.

$A$ kalles en <u>symmetrisk</u> matrise hvis $A = A^T$. Da er $m = n$ s: kvadratisk m.

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A^T = A$

**<u>Lemma 5.3.6</u>** La $A : m \times n$ matrise

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(AB)^T = B^T A^T$



Made with Goodnotes

Tilbake til invers matrise: Hvordan finne den inverse, hvis $A$ er invertibel? Generelt må vi finne $B$ ved å løse likningen

$$AB = I_n$$

Dette er et lineært likningssystem i $n^2$ variable/ukjente, nemlig $b_{ij}$-ene og med $n^2$ likninger.

Men for $n=2$ er det enkelt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Da er $A$ invertibel hvis og bare hvis $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, og da er

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Tallet $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ kalles <u>determinanten til $A$</u>



Made with Goodnotes

og beregner $\det(A)$.

Eks 1.) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-3)$

$= 11 \neq 0$

så $A$ er invertibel, og

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Kan sjekke: $A \cdot A^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$,

$$\det(A) = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6) = 0$$

så $A$ er ikke invertibel.



Made with Goodnotes

**Def 5.3.7** En $n \times n$ matrise $A$ kalles *ortogonal* hvis den er invertibel og $A^{-1} = A^T$.

---

Disse dukker opp i ulike sammenhenger, og her er beregning av $A^{-1}$ ingen jobb! Bare å transponere.

*Ekvivalent*: $A$ er ortogonal $\Leftrightarrow$ kolonnene i $A$ er parvis ortogonale (d: prikkprodukt er 0) og har lengde 1.

Fordi: $A^{-1} = A^T$ betyr $A^T A = I$

d: (rad $i$ i $A^T$) $\cdot$ (kolonne $j$) $= 0$ for $i \neq j$, og lik 1 for $i = j$.

Regel: Prod. av ortogonale matriser er ortogonal.



Made with Goodnotes