MAT 1080

5.4

5.4 Likninger og determinanter

Matriser brukes bl.a. til å løse lineære likningssystemer i virkelig felt!

Likninger dukker opp i "alle" sammenhenger i f.eks. regresjon / data science som vi så på (Minste kvadraters metode: kan se på dette som overbestemt likningssystem). Annet eksempel: optimering; løs $Df(x) = 0$. Eller i metoder for beregning av vær / klima.

Praktisk eks.: Finn to tall med differens 3 og sum lik 23.

Løsning: x og y

$$x - y = 3 \quad , \quad x + y = 23$$

Made with Goodnotes

Får: $x = y+3$ og setter inn i andre likning

$$(y+3)+y = 23$$

$$\Rightarrow 2y+3 = 23 \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$$

Så $x = y+3 = 13$

$$x = 13,\ y = 10$$

Likninger og matriser: Betrakt det lineære likningssystemet

$$\text{(*)} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

der $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Så: generelt system med to ukjente og to likninger

Skriver (*) som matriselikning:

Made with Goodnotes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$A \quad x = b$$

Så: $Ax = b$. Se at $Ax = b$ er ekvivalent med likningssystemet ⊛ ved å regne ut Ax, så

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Så: vi kan skrive ⊛ "pent" som $Ax = b$.
Men hva med å løse det?

Made with Goodnotes

Def 5.4.1 La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

være en 2×2 matrise. Determinanten til A er definert ved

$$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Eks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5$$

Prop. 5.4.2 La A være en 2×2 matrise som over og anta A er invertibel. Da er

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Made with Goodnotes

Faktisk har vi at A er invertibel hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.

Dette kan generaliseres til $n \times n$ matriser, så vi definerer:

Def. 5.4.3 La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Da definerer vi <u>determinanten</u> til A ved

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot a_{1j} \cdot \det(A_{1j})$$

der matrisen A_{ij} fremkommer fra A ved å slette rad i og kolonne j.

—

Made with Goodnotes

Dette er en rekursiv definisjon: for å regne ut $\det(A)$ må vi først regne ut noen mindre determinanter. (Og for å regne ut hver av disse, noen enda mindre, osv.)

Skrivemåte: $|A|$ betyr $\det(A)$.

Eks: La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(4 \cdot (-1) - 1 \cdot 2\right) - \left(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 6\right) + 3\left(2 \cdot 2 - 4 \cdot 6\right)$$

$$= -6 + 8 - 60 = -58$$

$$\boxed{-6-}$$

Made with Goodnotes

OBS: Faktisk kan man vise

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

der A_{ij} er submatrisen som fremkommer fra A ved å slette rad i og kolonne j. Dette gjelder for hvert i og kalles (Laplace-) ekspansjon i rad i.

En tilsvarende formel gjelder for ekspansjon i kolonner. Dette henger sammen med regelen

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Made with Goodnotes

For større matriser regner vi gjerne ut $\det(A)$, ikke ved formlene over, men ved Gauss eliminasjon (som vi ser på snart).

Teorem 5.4.4 La A og B være $n \times n$ matriser. Da er

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Teorem La A være en $n \times n$ triangulær matrise med $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ på hoveddiagonalen. Da er

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Prop 5.4.5 Hvis A har en rad eller kolonne med bare 0-er, er $\det(A) = 0$.

Made with Goodnotes

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Prop. 5.4.7

$$\det(k \cdot A) = k^n \det(A)$$

Märk: k^n, icke bara k !!

Bevis: $\det(k \cdot A) = \det(kI_n \cdot A)$

$= \det(kI_n) \cdot \det(A)$

$= k^n \cdot \det(A)$. ∎

En annan regel säger att hvis vi byter två rader så determinanten gånger med (-1).

Made with Goodnotes

Hva med inverser?

Prop 5.4.10. Hvis A er invertibel, er

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A A^{-1}) = \det(I)$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$ ∎

Prop 5.4.11 La A være en ortogonal matrise, d.v.s. $A^T A = I$ så A er invertibel og $A^{-1} = A^T$. Da er

$$\det(A) = \pm 1.$$

Bevis: $A^T A = I$, så

$$1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A)$$
$$= \det(A) \cdot \det(A)$$
$$= (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1.$$ ∎

Made with Goodnotes

Made with Goodnotes