MAT 1080

5.5

5.5 Lineære likningssystem

Lineært likningssystem : system av m lineære likninger i n variable

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Her er $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variablene (de ukjente) mens a_{ij}-ene og b_i-ene er gitte tall.

Hvis alle $b_i = 0$, kalles systemet **homogent**, ellers inhomogent.

Kan skrive systemet på matriseform

Made with Goodnotes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A $\quad$ x $\quad$ b

så: $\boxed{Ax = b}$

Tankemåte: I utgangspunkt gir $x_1, \ldots, x_m$ m frihetsgrader (for x), mens hver likning gir en begrensning som kan redusere frihetsgradene: hver ny likning reduserer frihetsgradene med 0 eller 1. (0 betyr ingen reduksjon). Hva som skjer har med lineær uavhengighet å gjøre.

Ofte: $m = n$, så kvadratisk system og matrise.

Skal se at ethvert system har 0, 1 eller uendelig mange løsninger!

Made with Goodnotes

En løsning av matriseligningen $Ax = b$ er en $x \in \mathbb{R}^n$ som oppfyller $Ax = b$.

Prop. 5.5.2 Betrakt systemet $Ax = b$ der A er $n \times n$ og invertibel. Da har $Ax = b$ nøyaktig én løsning og denne er gitt ved

$$x = A^{-1}b$$

Bevis: Idet A er invertibel finnes A^{-1} og $A^{-1}A = I$. Så

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Downarrow \\ A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ \Downarrow \\ (A^{-1}A)x &= A^{-1}b \\ \Downarrow \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

□

Made with Goodnotes

Prop 5.5.3 La A være $n \times n$ matrise. Da er:

$$\boxed{A \text{ er invertibel} \iff \det(A) \neq 0}$$

Bevis for $\Rightarrow$: $A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ ∎

$\Leftarrow$: Se på dette senere.

For å løse lineære likningssystemer, og spesielt på datamaskin, bruker vi spesielle operasjoner: elementære radoperasjoner.

Mål: formle systemet til vi kan enkelt se løsningen(e).

Made with Goodnotes

NB: Operasjonene endrer ikke løsningsmengden (ellers ville det bli kult!)

De tre elementære (rad-) operasjonene:

(R1) Multiplisere en likning med et tall $c \neq 0$.

(R2) Bytte rekkefølge på to likninger.

(R3) Addere et multippel av en likning til en annen likning.

Se at operasjonene kan reverseres, og at systemet før og etter en operasjon må være ekvivalente d.s.: samme løsningen.

Operasjonene kan også brukes på matriser, og - - -

Made with Goodnotes

og da ser vi på den utvidede matrisen

$$[A \; b]$$

som er $m \times (n+1)$ matrisen med b som siste kolonne.

1, -2, 1

Ehs:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

R3: $(-2) \cdot$ I $\to$ II

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 3x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

R1: $(\frac{1}{5}) \cdot$ II

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - \tfrac{2}{5}x_3 &= -\tfrac{12}{5} \\ 3x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Made with Goodnotes

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{12}{5}$$
$$3x_2 + 5x_3 = -1$$

$\frac{6}{5} + 5$

$\frac{31}{5} - 1$

R3: $(-3)\cdot$ II $\rightarrow$ III

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{12}{5}$$
$$\frac{31}{5}x_3 = \frac{31}{5}$$

R1: $\frac{5}{31}\cdot$ III

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$
$$x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{12}{5}$$
$$x_3 = 1$$

Vi har fått et triangulært system og finner løsningen (ved tilbakesubstitusjon)

$x_3 = 1 \Rightarrow x_2 - \frac{2}{5}\cdot 1 = -\frac{12}{5} \Rightarrow x_2 = -2$

$\Rightarrow x_1 - 2\cdot(-2) + 1 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$

Så: entydig løsning $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$.

Made with Goodnotes

Metoden kalles radreduksjon eller Gauss-eliminasjon.

På matriseform: representer bare tallene

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

R3: $(-2)\cdot$ I $\to$ II

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 5x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 3x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -2 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - \tfrac{2}{5}x_3 &= -\tfrac{12}{5} \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Viktig å gå begge veier: $\longrightarrow$ og $\longleftarrow$.

Made with Goodnotes

Flere eksempler i heftet.

Eks: La oss si at radreduksjon endte med følgende system

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$x_3 = 4$$

(samt likningen $0 = 0$ som er overflødig)

Hva er da løsningen? Se at $x_3 = 4$ og at x_2 kan velges fritt, og

$$x_1 = 2x_2 - 4 + 1 = 2x_2 - 3$$

Så generell løsning:

$$x_1 = 2x_2 - 3, \quad x_2 \text{ fri}, \quad x_3 = 4$$

Altså uendelig mange løsninger.

Made with Goodnotes

Siste mulighet: Etter radreduksjon kan vi ende opp med likningen og en likning

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1$$

$\Rightarrow 0 = 1$. Da er koeffisienten av systemet ikke lik noen løsning.

Generelt kan likningssystemet reduseres til en bestemt form, som for matrise utvidet $[A\ b]$ ser slik ut

$$\begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & * \cdots * & 0 & & \\ & \vdots & & \vdots & & 1 & \ddots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & 1 & * \cdots \\ & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolonnen med * (vilkårlig) svarer til fri variable.

Made with Goodnotes

Denne formen kalles rad-redusert trappeform.

Enhver matrise kan reduseres til en slik form, og formen er entydig.

Så: ønsket hvordan radoperasjoner utføres under man med samme matrise på rad-redusert trappeform.

Fra denne kan man bestemme løsningene:

- ingen løsning
eller
- nøyaktig én løsning
eller
- uendelig mange løsninger

Made with Goodnotes

Til slutt om rad-redusert trappeform R:

$$R = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & * \cdots * & 0 & & \\ & \vdots & & \vdots & & 1 & \ddots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & 1 & * \cdots \\ & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Hver 1-er angitt kalles en <u>ledende 1-er</u>
- Antall ledende enere er et viktig tall som kalles <u>rangen</u> til den opprinnelige matrisen E ($= [A \; b]$) og det er også rangen til R selv
- radene med ledende enere er lineært uavhengige
- Variable som svarer til kolonner med ledende enere ("pivotkolonne") er avhengige variable mens de andre er fri variable (uavhengige).

Made with Goodnotes