MAT 1080

6.1

Made with Goodnotes

KAP. 6 SPEKTRALTEORI

Dette er også et sentralt tema i lineær algebra.

6.1 Egenverdier og egenvektorer

La A være en $n \times n$ matrise og la $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Da kan vi regne ut bildevektoren

$$y = Ax$$

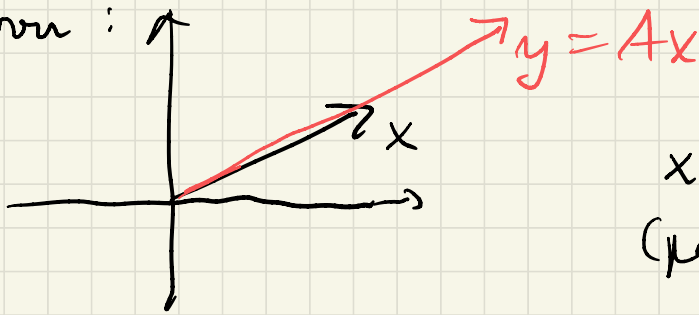
Hvis y er parallell med x, sier vi at x er en egenvektor for A.
Skal studere dette!

NB: To vektorer x og y i $\mathbb{R}^n$, begge ulik 0, kalles parallelle dersom

Made with Goodnotes

$x = \alpha y$ for en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessuten sier vi at 0-vektoren er parallell med enhver vektor.

Så over:



$x \parallel y$
(parallelle)

NB: "Som regel vil x og Ax ikke være parallelle.

Def. La A være en $n \times n$ matrise. Dersom

$$\boxed{\begin{array}{l} v \neq 0 \text{ og} \\ Av = \lambda v \end{array}}$$

for en eller annen $\lambda \in \mathbb{R}$, så kalles v en <u>egenvektor</u> for A, og λ kalles tilhørende <u>egenverdi</u>.

Made with Goodnotes

Eks: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \lambda x$ for alle λ, så x er ikke en egenvektor for A.
- $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Da er

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3x$$

så $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A og tilhørende egenverdi er $\lambda = 3$.

- Ser også at $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda = 2$.

Made with Goodnotes

Fakta: For en diagonalmatrise med diagonal $a_1, a_2, \dots, a_n$ vil standard enhetsvektor e_i være egenvektor og tilhørende egenverdi er $\lambda = a_i$ (for $i = 1, 2, \dots, n$).

For generelle matriser er det mer komplisert.

Hvorfor er egenvektorer/egenverdier av interesse?

En viktig bruk er for <u>dynamiske systemer</u>: har en starttilstand f.eks. $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (si x_0 gir antall studenter og antall leger ved et starttidspunkt)

Made with Goodnotes

Systemet endrar tillstand vid

$$x_{t+1} = A x_t$$

för hvert tidspunkt t (år, f.ehs)
Så ny tillstand framkommer vid
å gange med en gitt matrise A.
Da blir

$$x_1 = A x_0, \quad x_2 = A x_1 = A^2 x_0, \ldots,$$

$$x_{20} = A^{20} x_0, \text{ der}$$

$$A^{20} = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{20 \text{ ganger}}$$

Nokså tungvint å regne ut x_{20}.
Men si at x_0 er en egenvektor
for A med egenverdi λ. Da er

Made with Goodnotes

$$x_1 = Ax_0 = \lambda x_0$$

$$x_2 = Ax_1 = A(\lambda x_0) = \lambda Ax_0 = \lambda^2 x_0$$

$$x_3 = Ax_2 = A(\lambda^2 x_0) = \lambda^2 Ax_0 = \lambda^3 x_0$$

$$\vdots$$

$$x_{20} = Ax_{19} = A(\lambda^{19} x_0) = \lambda^{20} x_0$$

(20 var for å være konkret, tilsvarende for generell tid t)

Så da er x_{20} (eller x_t) svært enkelt å beregne.

Dette kan utnyttes til å beregne enkelt for enhver starttilstand.

Made with Goodnotes

Eks. La $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

og $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da er

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda = 5$. ——— △

Eks. La $A = I_n$ = identitetsmatrisen

Da er $Ax = I_n x = x = 1 \cdot x$

så enhver x er en egenvektor for I_n med tilhørende egenverdi $\lambda = 1$. ———

Made with Goodnotes

Hvordan kan vi finne egenvektorer og egenverdier?

Vi har: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$

Så $x \neq 0$ er en egenvektor for A

$\Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$, så dette lineære likningssystemet (i x, for λ er gitt nå) har en ikketriviell løsning $x \neq 0$.

Da er matrisen $A - \lambda I$ <u>singulær</u> d: ikke invertibel.

For hvis $A - \lambda I$ var invertibel ville

$$(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x = (A - \lambda I)^{-1} 0 = 0$$

Made with Goodnotes

Så

A har egenvärde $\lambda \neq 0$ och tillhörande egenvektor x

$\Updownarrow$

$A - \lambda I$ är singulär

$\Updownarrow$

$\det(A - \lambda I) = 0$

(Hint: matrisen B är inverterbar $\Leftrightarrow \det(B) \neq 0$)

- $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kallas det karakteristiska polynomet till A

Def är ett polynom i λ av grad n.

- $\det(A - \lambda I)$ kallas den karakteristiska ekvationen till A

Made with Goodnotes

Ditte gir metoden:

1.) Finn løsningen λ av

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

$\chi_A(\lambda)$ eller $p_A(\lambda)$

2.) For hver slik løsning λ løs det lineære likningssystemet

$$Ax = \lambda x$$

og velg en ikke-null løsning x; ditte er en egenvektor for A med egenverdi λ.

Kan brukes for håndregning når n er liten. Ellers andre numeriske metoder på datamaskin.

Made with Goodnotes

Eks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Karakteristisk polynom er

$$p_A(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= (1-\lambda-2)(1-\lambda+2)$$

$$= (-1)(\lambda+1)(3-\lambda)$$

(eller regn ut og bruk abc-formel)

Så: $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = -1$ eller $\lambda = 3$

Dette er egenverdiene.

$\lambda = -1$: Regner ut egenrekka

$$Ax = (-1)\cdot x \iff (A + I)x = 0 \iff$$

Made with Goodnotes

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \;,\; 2x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

så lösningen är $x_1 = -x_2$, x_2 fri:

vektorer $t(-1, 1)$ för $t \in \mathbb{R}$

Egenvektor är då $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(Alla egenvektorer för $\lambda = -1$ är $t(-1, 1)$ där $t \neq 0$)

$\underline{\lambda = 3}$: $(A - 3I)x = 0$

$$\Updownarrow$$
$$-2x_1 + 2x_2 = 0 \;,\; 2x_1 - 2x_2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

så lösning $x_1 = x_2$, x_2 fri

Egenvektor är då $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Made with Goodnotes

Prop 6.1.2 La A være $n \times n$ matrise, A inverterbar, med egenvektor v og tilhørende egenverdi λ. Da er $\lambda \neq 0$ og A^{-1} har egenvektor v, med tilhørende egenverdi λ^{-1}.

Bevis: Må ha $Av \neq 0$ idet A inverterbar.
Så $Av = \lambda v \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$
$\Rightarrow v = \lambda A^{-1}v \Rightarrow A^{-1}v = \lambda^{-1}v$ ∎

Prop 6.1.3 La A være $n \times n$ matrise. Da har A og A^T (transponert) samme karakteristiske polynom og derfor de samme egenverdiene.

Eksistens: $A: n \times n$ har n egenverdier, men de kan være komplekse, og falle sammen.

Made with Goodnotes