MAT 1080

6-2

6.2 Spektralteoremet for symmetriske matriser

Symmetriske matriser ($A = A^T$) dukker opp i anvendelser, og de har spesielle spektralegenskaper.

Eks som vi ser på: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Dette er en symmetrisk matrise.
Vi fant at egenverdiene er -1 og 3 og tilhørende egenvektorer

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Made with Goodnotes

To egenskaper her:

1.) <u>v og w utspenner hele $\mathbb{R}^2$</u>:

enhver $x \in \mathbb{R}^2$ kan skrives som en lineær kombinasjon av v og w. Sjekker dette

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -a + b = x_1 \;,\; a + b = x_2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \;,\; a = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2)$$

OK

2.) <u>v og w er ortogonale</u>:

prikkprodukt er 0.

$$v \cdot w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1, 1) \cdot (1, 1)$$

$$= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

Made with Goodnotes

Disse egenskapene holder faktisk for symmetriske $n \times n$ matriser helt generelt!

Def: La $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Disse vektorene danner en *basis* for $\mathbb{R}^n$ dersom de utspenner hele $\mathbb{R}^n$: enhver $x \in \mathbb{R}^n$ er en lineær kombinasjon av $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Hvis $v_1, v_2, \dots, v_n$ også er parvis ortogonale ($\Leftrightarrow v_i \cdot v_j = 0$ når $i \neq j$) og hver v_i har lengde 1 ($\Leftrightarrow v_i \cdot v_i = 1$), så danner vektorene en *ortonormal basis* for $\mathbb{R}^n$

Made with Goodnotes

Basis er viktig begrep. Ortonormal basis er ekstra kjekt!

Eks: Standard enhetsvektorer

$e_1, e_2, \dots, e_n$ i $\mathbb{R}^n$

er en ortonormal basis i $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ har (uendelig) mange (ortonormale) basiser. (Unntatt for $n=1$, der i alle fall -1 er eneste ortonorm. basisen)

Teorem 6.2.1 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) Anta A er en symmetrisk $n \times n$ matrise. Da finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A.

Made with Goodnotes

Faktisk sier teoremet mer: at A har n reelle egenverdier.

Ikke-symmetriske matriser har nemlig ikke (noen) egenverdier som er komplekse tall.

Viktig egenskap ved ortonormal basis $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i $\mathbb{R}^n$:

Anta $x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$

og $y = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$.

Hva er prikkproduktet av x og y (som jo sier noe om "vinkelen" mellom x og y)

Made with Goodnotes

$$x \cdot y = (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \cdot (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n)$$

$$= \sum_{i \neq j} a_i b_i \underbrace{v_i \cdot v_j}_{=0} + \sum_i a_i b_i \underbrace{v_i \cdot v_i}_{=1}$$

$$= \sum_i a_i b_i .$$

Annan viktig egenskap:

Prop 6.2.2 Anta $v_1, v_2, \ldots, v_n$ är en ortonormal basis för $\mathbb{R}^n$. Låt $v \in \mathbb{R}^n$. Då är

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot v_i) v_i$$

Made with Goodnotes

Så: Det er enkelt å skrive v som en lineær kombinasjon

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

av v_i-ene: bare la

$$c_i = v \cdot v_i \quad \text{for hver } i.$$

Dette brukes mye.

Bevis:

$$v \cdot v_i = (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) \cdot v_i = c_i v_i \cdot v_i$$

$$= c_i$$

——— ∎

Made with Goodnotes