MAT 1080

Trig.

Notat: Trigonometriske funksjoner

På skolen (≠ universitet!) og i IT lærte du om trigonometri, som hjelpemiddel for å regne ut vinkler og lengde av (bl.a) sider i trekanter.

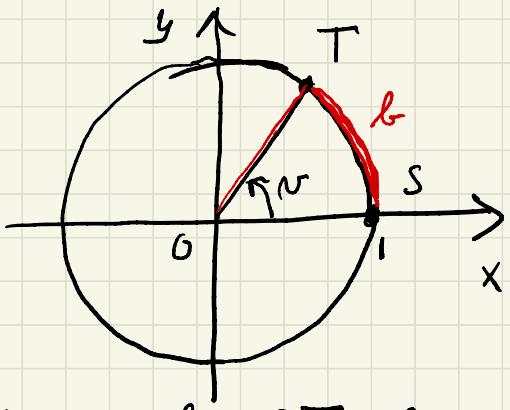
Skal gå videre og målet er å innføre nyttige funksjoner basert på sinus, cosinus osv.
For å gjøre det trengs vi en annen måte å måle vinkler på.

1. Radianer

Kan tenke på en vinkel som resultat av en dreining av et linjesegment, eller pil.

Made with Goodnotes

Enhetssirkel
radius 1,
sentrum i
origo



Dreier OS og får OT, dannar vinkel v.
Vi er vant til å måle denne i grader, der 90° er rett vinkel, 360° hele omdreiinga (sirkel) osv.

Vi kan istadet måle vinkelen ut fra lengden på buen på enhetssirkelen som dreiinga gir. Dette er lengde av ein krum kurve (sirkelsegment). Ein kan gi ein presis definisjon av slike krumme kurver og lengde, men vi går ikke inn på det her. Vi vet at sirkelen har omkrets 2π, så vinkel 360° må svare til 2π.

Made with Goodnotes

Andre vinkler får vi ved å se hvor stor del av hele sirkelen som vinkelen v gir. F. eks.

		lengde
$v = 0°$	$\longrightarrow$	0
$v = 90°$	$\longrightarrow$	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
$v = 180°$	$\longrightarrow$	$\frac{2\pi}{2} = \pi$
$v = 45°$	$\longrightarrow$	$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Dette nye vinkelmålet kalles radianer (eller absolutt vinkelmål).

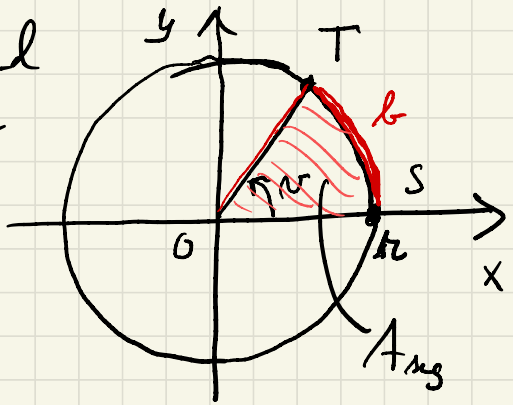
NB: Vi kan dreie linjesegmentet mer enn én omdreining, det gir vinkler større enn 2π i radianer, eller vi kan dreie motsatt vei (med urviseren), da får vi negative vinkler.

Så: ethvert tall (reelt tall = desimaltall) svarer til en vinkel.

Made with Goodnotes

Kan bruke radianen til å regne ut visse arealer:

sirkel med radius r



vinkel v i radianer = lengde av buen b når $r = 1$

Arealet A_{seg} er like stor del av sirkelarealet πr^2 som v er av sirkelomkrets 2π, så

$$\frac{A_{seg}}{\pi r^2} = \frac{v}{2\pi} \quad \Rightarrow \boxed{A_{seg} = \frac{1}{2} r^2 v}$$

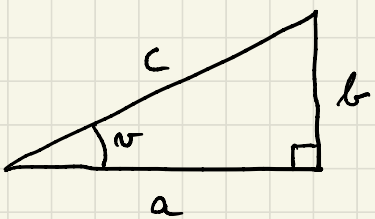
som gjelder når $0 \leq v \leq 2\pi$.

NB: I hele MAT1080 vil vi måle vinkler i radianer.

Made with Goodnotes

2. Trekantberegninger

Repetisjon:



rettvinklet trekant

Definisjon:

sinus hil $v = \sin v = \frac{b}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}}$

cosinus hil $v = \cos v = \frac{a}{c} = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hyp.}}$

tangens hil $v = \tan v = \frac{b}{a} =$ --

(ny) cotangens hil $v = \cot v = \frac{a}{b} =$ --

Merk: $\frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \tan v$

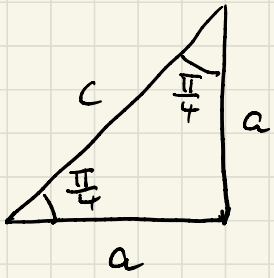
og $\cot v = \frac{1}{\tan v}$.

For noen vinkler kan vi regne ut sinus dv. uhsakt.

Made with Goodnotes

$v = \frac{\pi}{4}$

($\hat{=}$ 45°)



Pythagoras' gir: $a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2}\, a$$

Dvs med

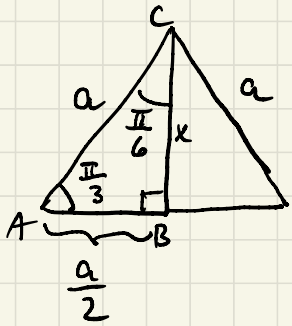
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$$

$$\cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = 1$$

For $v = \frac{\pi}{3}$ kan vi se på trekanten



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{4}}\, a$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

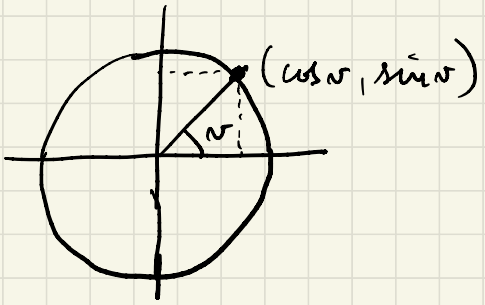
Made with Goodnotes

Tabell

v	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin v$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos v$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan v$	1	$\sqrt{3}$	IKKE DEF.
$\cot v$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

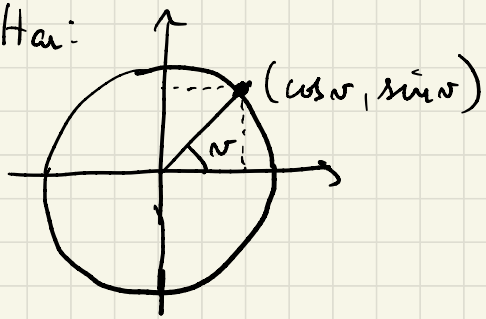
Ut fra dette kan man finne ekvakte verdier for "tilsvarende vinkler" i andre kvadranter.

3. Generelle definisjoner av trigonometriske funksjoner

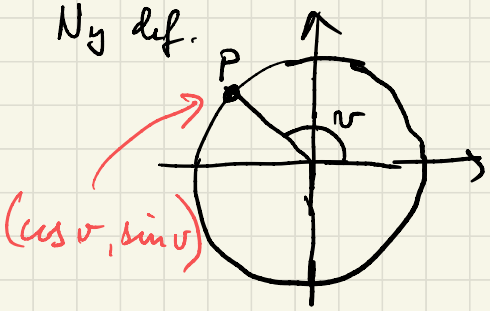


Made with Goodnotes

Hur:



Ny def.



Så vi definierar cos v och sin v för vilken vinkel v, också utanför första kvadrant, vid att se på punkten P v definierar på enhetscirkeln och låt

$\cos v$ = x-koordinat till P

$\sin v$ = y-koordinat till P

Så vi mäter vinkel i radianer och får därmed definierat cos v och sin v för alltså vilket tal v (vinkel).

Detta ger två funktioner:

- cosinus-funktionen
- sinus-funktionen

Made with Goodnotes

Dette gir også tangens og cotangens funksjonene definert ved

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} \quad (\text{når } \cos v \neq 0)$$

$$\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} \quad (\text{når } \sin v \neq 0)$$

Fra def. ser vi at

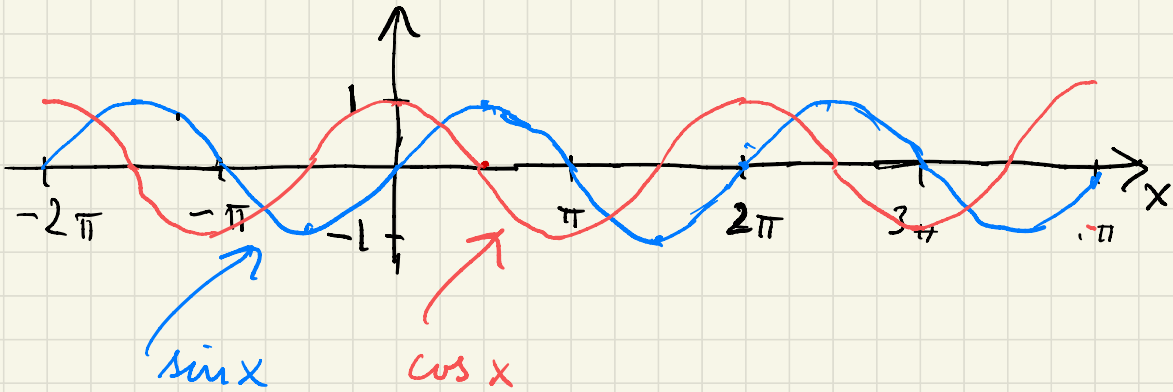
$$\sin(v+2\pi) = \sin v \qquad \sin(-v) = -\sin v$$
$$\cos(v+2\pi) = \cos v \qquad \cos(-v) = \cos v$$

(Fakhish: $\sin(v+2k\pi) = \sin(v)$ for alle heltall k, tilsv. for cos)

Men hvordan ser grafen til sinus- og cosinus funksjonene ut?

Har avm verdim og kan finne flere verdier (tilnærmet): fir da

Made with Goodnotes

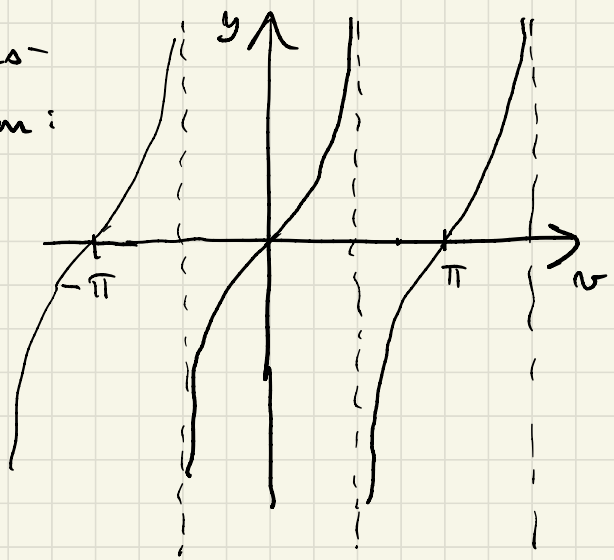


Så vi ser at disse funksjonene er interessante: de beskriver (periodiske) bølger!

Eks: – bølger i havet

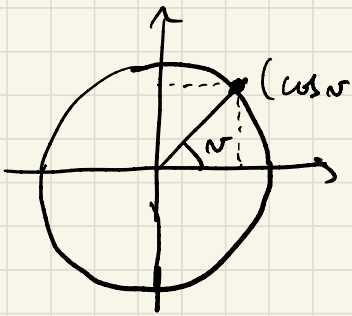
– temperaturen i løpet av døgnet

Tangens-funksjon:

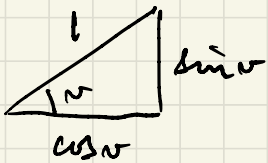


Made with Goodnotes

4. Trigonometriska identiteter



Från Pythagoras:



$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

(NB: $\sin^2 v$ betyder $(\sin v)^2$)

Därmed

$$\sin v = \pm\sqrt{1-\cos^2 v}$$

$$\cos v = \pm\sqrt{1-\sin^2 v}$$

Summa av vinklar:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

Made with Goodnotes

Får også formler for $\sin(u-v)$ og $\cos(u-v)$ ved å bruke $\sin(u-v) = \sin(u+(-v))$ sammen med tidligere formler.

Bevis: Se notatet.

5. Fasefom

En omskrivning er nyttig for funksjoner av typen

$$f(x) = A\sin cx + B\cos cx$$

der A, B, c er konstanter.

Anta at ikke begge A, B er 0. Da er

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin cx + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos cx\right)$$

Men $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ ligger på enhetssirkelen

Made with Goodnotes

så det finns en (vinkel) v slik at

$$\cos v = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \sin v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

Så:

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos v \cdot \sin cx + \sin v \cdot \cos cx\right)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(cx+v)$$

FASE-FORM

↑ ved formel for sinus til sum av vinkler

Denne omskrivningen kan brukes til å løse likninger med sinus og cosinus.

Eks: $f(x) = \sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x$

Vil skrive på fasefrom. Her er

$A = \sqrt{3}$, $B = -1$, $c = 4$. Så

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

Made with Goodnotes

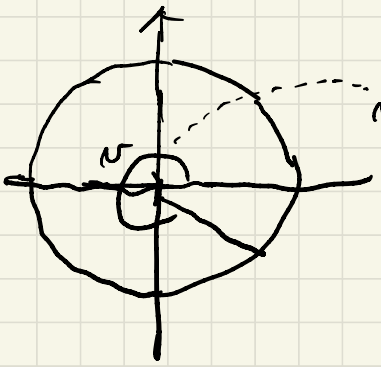
Dette gir

$$f(x) = 2\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin 4x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos 4x\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

En vinkel v med $(\cos v, \sin v) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ er $\frac{11}{6}\pi$, så

$$f(x) = 2\sin\left(4x + \frac{11}{6}\pi\right)$$



$v = \frac{11}{6}\pi \left(= 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

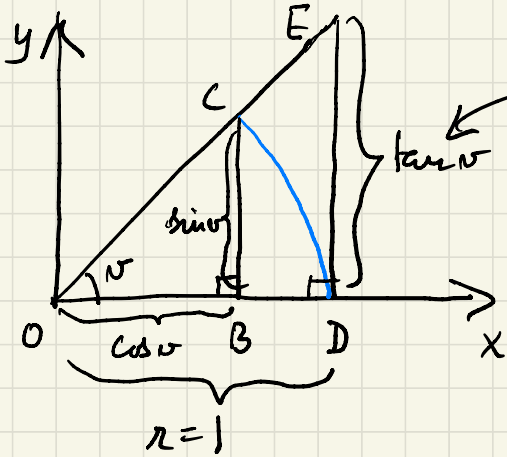
Kunne også brukt $v = -\frac{\pi}{6}$ som gir

$$f(x) = 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Made with Goodnotes

6. Noen nyttige ulikheter

Se på



fadi

$$\frac{|DE|}{|OD|} = |DE|$$

og

$$\frac{|DE|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|OB|} = \frac{\sin v}{\cos v}$$

Da er

areal $\triangle OBC \leq$ areal sirkelsektor $ODC \leq$ areal $\triangle ODE$

$$\frac{1}{2}\sin v \cdot \cos v \leq \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot v \leq \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sin v}{\cos v}$$

(sektoren 1)

Ganger med $\frac{2}{\sin v}$ (antar v i I kvadrant, $\sin v \neq 0$)

og får

$$\cos v \leq \frac{v}{\sin v} \leq \frac{1}{\cos v}$$

som gir

Made with Goodnotes

$$\cos v \leq \frac{\sin v}{v} \leq \frac{1}{\cos v}$$

Konsekvens:

$$\lim_{v \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1$$

fadi $\cos v \to 1$ när $v \to 0$ (när $v < 0$ vil $\frac{\sin v}{v} = \frac{-\sin v}{-v} = \frac{\sin(-v)}{(-v)} \to 1$ ↖ $-v > 0$)

Man kan også vise at

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

og

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

(brukes smart!)

men dette følger direkte av en regel vi skal se på senere.

Made with Goodnotes

7. Derivasjon av trigonometriske funksjoner

La $f(x) = \sin x$. Skal vise at

$f'(x) = \cos x$, så

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Husk: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Kan bruke formel for sinus til sum av vinkler:

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}_{\to 1} \quad \text{når } x \to 0$$

$\to \cos x$ når $x \to 0$.

Made with Goodnotes

På liknende måte kan man se at

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

og ved regel for derivasjon av brøk får vi

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

Man behøver ikke huske alle disse formlene, og på eksamen vil vi oppgi noen viktige formler.

Made with Goodnotes