FORMELSAMLING FOR MAT1080

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(e^x)' = e^x$
$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Identiteter

Eksponential: $a^x a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \qquad \ln(x^a) = a \ln x$

Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ når $n \neq -1$, $\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$
$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Funksjoner av flere variable

Kjerneregel: For $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))\ x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))\ x_n'(t)$$

Annenderiverttest: Anta at (a, b) er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Da gjelder

(i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
(ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
(iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Numeriske formler

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Delta x}{2}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right)$

Minste kvadraters metode: $a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$ og $b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Annengradslikning

abc-**formel:** $ax^2 + bx + c = 0$, med $a \neq 0$ har løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Determinanter og matriser

Determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Regneregler for determinanter: $\det(I_n) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, $\det(A^T) = \det(A)$.

Invers 2×2-matrise: Hvis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, så er $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Egenvektor v og egenverdi λ: $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Betingelse for egenverdi: $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Definisjon av lineæravbildning: $\mathbf{T}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{T}(\mathbf{x}) + b\mathbf{T}(\mathbf{y})$

Matrisen til en lineæravbildning $\mathbf{T}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $A = [\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n)]$

Konveksitet

Jensens ulikhet: $f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n) \leq \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{x}_n)$