Løsningsforslag til underveiseksamen i MAT 1100

DATO: TIRSDAG 12/10, 2004
TID: KL. 9.00-11.00
VEDLEGG: FORMELSAMLING
TILLATTE HJELPEMIDLER: INGEN
OPPGAVESETTET ER PÅ 4 SIDER

Eksamen består av 20 spørsmål. De 10 første teller 2 poeng hver, de 10 siste teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = x \arctan x$ er:
☐ $1 \cdot \frac{1}{1+x^2}$
☐ $\arctan x + \frac{x}{1+x^2}$
☐ $\arctan x + \frac{x}{\arccos^2 x}$
☐ $\frac{x}{1+x^2}$
☐ $\arctan x - \frac{x}{\sin^2 x}$

Riktig svar: b) $\arctan x + \frac{x}{1+x^2}$
Begrunnelse: Vi bruker produktregelen:

$$f'(x) = 1 \cdot \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

2. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = (\cot x)^2$ er:
☐ $2\frac{\cot x}{1+x^2}$
☐ $2 \cot x$
☐ $2\frac{\cot x}{\tan x}$
☐ $2\frac{\cot x}{\cos^2 x}$
☐ $-2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$

Riktig svar: e) $-2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$
Begrunnelse: Vi bruker kjerneregelen:

$$f'(x) = 2 \cot x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$$

3. (2 poeng) Det komplekse tallet $\frac{2+i}{3-i}$ er lik:
☐ $\frac{1+i}{2}$
☐ $\frac{2}{3} - i$

- ☐ $\frac{5+5i}{8}$
- ☐ $\frac{7+i}{10}$
- ☐ $\frac{-1+7i}{3}$

Riktig svar: a) $\frac{1+i}{2}$
Begrunnelse: Vi ganger oppe og nede med den konjugerte til nevneren:

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+2i+3i-1}{9-(-1)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1+i}{2}$$

4. (2 poeng) Polarkoordinatene til det komplekse tallet $-\sqrt{3}+i$ er:

- ☐ $r = 2, \theta = \frac{5\pi}{6}$
- ☐ $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{6}$
- ☐ $r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $r = 2, \theta = \frac{7\pi}{6}$

Riktig svar: a) $r = 2, \theta = \frac{5\pi}{6}$
Begrunnelse: Vi har $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$. Videre er $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$. Siden tallet ligger i annen kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

5. (2 poeng) Polarkoordinatene til et komplekst tall er $r = 4, \theta = \frac{11\pi}{6}$. Tallet er:

- ☐ $-2\sqrt{3}+2i$
- ☐ $2\sqrt{3}-2i$
- ☐ $2\sqrt{3}+2i$
- ☐ $-2+i2\sqrt{3}$
- ☐ $-4\sqrt{3}+4i$

Riktig svar: b) $2\sqrt{3}-2i$
Begrunnelse: Vi har

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{1}{2})) = 2\sqrt{3}-2i$$

6. (2 poeng) Det komplekse tallet $3e^{8\pi i/3}$ er lik:

- ☐ $-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Riktig svar: a) $-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$
Begrunnelse: Siden $\frac{8\pi}{3}=2\pi+\frac{2\pi}{3}$, har vi

$$3e^{8\pi i/3}=3e^{2\pi i/3}=3(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=3(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{x^2}$ er lik:
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ 2
- ☐ 1

Riktig svar: d) 2
Begrunnelse: Bruker vi L'Hôpitals regel, får vi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x^2)4x}{2x}=\lim_{x\to 0}2\cos(2x^2)=2$$

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+2x^2}{4-3x^3}$ er lik:
- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ ∞
- ☐ $\frac{7}{4}$
- ☐ $-\frac{7}{3}$

Riktig svar: e) $-\frac{7}{3}$
Begrunnelse: Det går an å bruke L'Hôpitals regel, men det er raskere å trekke ut den høyeste potensen av x opp og nede:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+2x^2}{4-3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(7+\frac{2}{x})}{x^3(\frac{4}{x^3}-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(7+\frac{2}{x})}{(\frac{4}{x^3}-3)}=-\frac{7}{3}$$

9. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$ er lik:
- ☐ e
- ☐ 1
- ☐ ∞
- ☐ $e^{\frac{1}{2}}$
- ☐ e^2

Riktig svar: e) e^2
Begrunnelse: Vi flytter først all x-avhengigheten opp i eksponenten:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(e^{\ln(\tan x)})^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\ln(\tan x)}{x-\frac{\pi}{4}}}$$

Deretter bruker vi L'Hôpitals regel på eksponenten (som er et "0/0"-uttrykk):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \frac{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{1} = 2$$

Går vi så tilbake til det opprinnelige uttrykket, får vi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\ln(\tan x)}{x-\frac{\pi}{4}}} = e^2$$

10. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = 2x+3$ er:

☐ $g(x) = \frac{1}{2x+3}$
☐ $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{5}{2}$
☐ $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
☐ $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3}$
☐ $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

Riktig svar: c) $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
Begrunnelse: Løser vi ligningen $y = 2x+3$ for x, får vi $x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$. Dette betyr at $g(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$. Bytter vi navn på variabelen, får vi $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$.

11. (3 poeng) Funksjonen f er injektiv, og vi vet at $f(2) = 3$ og $f'(2) = \frac{1}{4}$. Hvis g er den omvendte funksjonen til f, vet vi også at:

☐ $g'(\frac{1}{4}) = 2$
☐ $g'(2) = 3$
☐ $g'(2) = 4$
☐ $g'(3) = \frac{1}{4}$
☐ $g'(3) = 4$

Riktig svar: e) $g'(3) = 4$
Begrunnelse: Vi bruker formelen $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$. I vårt tilfelle er $x = 2$ og $y = 3$, så vi får: $g'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.

12. (3 poeng) Det *reelle* fjerdegradspolynomet $P(z)$ har $2i$ og $1+i$ som røtter. $P(z)$ er lik:

☐ $z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4$
☐ $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$
☐ $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$
☐ $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 3z + 8$
☐ $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 4z + 8$

Riktig svar: b) $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, vet vi at den konjugerte til en kompleks rot også er en rot. Det betyr at i tillegg til de to røttene i oppgaveteksten, har vi røttene $-2i$ og $1-i$. Dermed er (hvis vi antar at ledende

koeffisient er 1):

$P(z) = (z-i)(z-(-i))(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$

13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$ er lik:

☐ 0
☐ $\frac{1}{2}$
☐ ∞
☐ 2
☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Riktig svar: b) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Vi ganger med den konjugerte oppe og nede:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3})}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^3+x^2)-x^3}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3+x^2}+\sqrt{x^3})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} = \frac{1}{2}$$

14. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{hvis } x < 0 \\ 2x+1 & \text{hvis } x \geq 0 \end{cases}$. Er

(i) f kontinuerlig i 0? (ii) f deriverbar i 0?

☐ Både (i) og (ii)
☐ Ingen av delene
☐ (i), men ikke (ii)
☐ (ii), men ikke (i)
☐ Gir ikke mening siden 0 er bruddpunktet

Riktig svar: c) (i), men ikke (ii).
Begrunnelse: Funksjonen er kontinuerlig fordi $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0)$ og $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+1) = 1 = f(0)$. Den er ikke deriverbar fordi $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} = 1$ mens $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^0} \frac{(2x+1)-1}{x} = 2$. Følgelig eksisterer ikke $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

15. (3 poeng) Når $x \to \infty$, har funksjonen $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$ asymptoten:

☐ $y = x + 2$
☐ Den har ingen asymptote
☐ $y = x$
☐ $y = x - 1$
☐ $y = 2x - 1$

Riktig svar: a) $y = x + 2$
Begrunnelse: Vi regner først ut:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}} = 1$$

Dette betyr at hvis f har en asymptote $y = ax + b$, så er $a = 1$. For å finne en eventuell b, regner vi ut:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (xe^{\frac{2}{x}} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2e^{\frac{2}{x}} = 2$$

Altså er asymptoten $y = x + 2$.

16. (3 poeng) Integralet $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ er lik:
- ☐ $e^x \arctan e^x + C$
- ☐ $\ln(1 + e^{2x}) + C$
- ☐ $e^x \ln(1 + e^{2x}) + C$
- ☐ $e^x + e^{-x} + C$
- ☐ $\arctan e^x + C$

Riktig svar: e) $\arctan e^x + C$
Begrunnelse: Bruker vi kjerneregelen på $\arctan e^x$, får vi $\frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$. Alternativt kan vi sette $u = e^x$ i integralet $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$. Da er $du = e^x\, dx$, og vi får:

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{1 + u^2}\, du = \arctan u + C = \arctan e^x + C$$

17. (3 poeng) $\cos 75°$ er lik ($75°$ er det samme som $\frac{5\pi}{12}$ radianer):
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- ☐ $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{4}$
- ☐ $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{6}$
- ☐ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Riktig svar: e) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
Begrunnelse: Siden $75 = 30 + 45$, fremkommer et argument på $75°$ når vi ganger sammen et komplekst tall med argument $30°$ og et med argument $45°$. Siden $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ har argument $30°$ og modulus 1, og $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ har

argument 45°, vil zw ha argument 75° og modulus 1. Det betyr at realdelen til zw er lik $\cos 75°$. Siden

$$zw = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

er $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

18. (3 poeng) Du skal bruke definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen gitt ved $f(x) = 7x - 4$ er kontinuerlig i $a = 3$. Gitt $\epsilon > 0$, hvor liten må du velge δ for at $|f(x) - f(3)| < \epsilon$ når $|x - 3| < \delta$?

- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{2}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{1}{\epsilon}$
- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{7}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{4}$

Riktig svar: d) Mindre enn $\frac{\epsilon}{7}$
Begrunnelse: Sett $h = x - 3$. Da er $x = 3 + h$ og

$$|f(x) - f(3)| = |(7x - 4) - (7 \cdot 3 - 4)| = |7 \cdot (3 + h) - 21| = 7|h|$$

Skal vi få denne størrelsen mindre enn ϵ, må vi ha $|h| = |x - 3|$ mindre enn $\frac{\epsilon}{7}$. Vi velger derfor $\delta = \frac{\epsilon}{7}$.

19. (3 poeng) Den deriverbare funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ skjærer linjen $y = ax + b$ tre steder. Da vet vi at:

- ☐ Det finnes nøyaktig ett punkt x der $f(x) = b$
- ☐ f har et maksimums- og et minimumspunkt
- ☐ Det finnes minst to punkter x der $f'(x) = a$
- ☐ Det finnes et punkt x der $f(x) = a$
- ☐ Det finnes nøyaktig ett punkt x der $f'(x) = a$

Riktig svar: c) Det finnes minst to punkter x der $f'(x) = a$.
Begrunnelse: La x_1, x_2, x_3 være (x-koordinatene til) de tre punktene der grafen skjærer linjen. Sekanten fra $(x_1, f(x_1))$ til $(x_2, f(x_2))$ har stigningstall a (siden begge punktene ligger på linjen $y = ax+b$), og ifølge middelverdisetningen finnes det et punkt c mellom x_1 og x_2 der $f'(c) = a$. På samme måte ser vi at det må finnes et punkt d mellom x_2 og x_3 der $f'(d) = a$. Altså finnes det minst to punkter der $f'(x) = a$ (det kan godt være flere enn to).

20. (3 poeng) En radar er plassert 14 meter over en vannrett vei. I et bestemt øyeblikk er avstanden fra radaren til en bil på bakken 50 meter og avtar med en fart på 24m/s. Hvor fort kjører bilen? (Du kan få bruk for at $\sqrt{2304} = 48$.)

- ☐ 24m/s
- ☐ 22.5m/s

☐ 23.04m/s
☐ 25m/s
☐ 27.5m/s

Riktig svar: d) 25m/s
Begrunnelse: La avstanden fra radaren til bilen på et (generelt) tidspunkt t være $x(t)$. Lag en rettvinklet trekant der $x(t)$ er hypotenusen, der avstanden på 14m fra radaren ned til bakken er den ene kateten, og der den andre kateten har lengde $y(t)$. Da er $x'(t)$ den kjente hastigheten (-24m/s, der minusen skyldes at avstanden avtar) og $y'(t)$ den ukjente hastigheten. Pythagoras forteller oss at

$$x(t)^2 = y(t)^2 + 14^2 \tag{1}$$

Deriverer vi dette uttrykket mhp. t, får vi:

$$2x(t)x'(t) = 2y(t)y'(t) + 0$$

Løser vi denne ligningen for den ukjente hastigheten $y'(t)$, ser vi at

$$y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{y(t)}$$

I det øyeblikket vi er interessert i, er $x(t) = 50\text{m}$ og $x'(t) = -24\text{m/s}$. I tillegg kan vi finne $y(t)$ fra ligning (1) ovenfor. Vi får $y(t) = \sqrt{50^2 - 14^2} = \sqrt{2500 - 196} = \sqrt{2304} = 48$. Dermed har vi

$$y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{y(t)} = \frac{50\text{m} \cdot (-24)\text{m/s}}{48\text{m}} = -25\text{m/s}$$

($y'(t)$ er negativ siden avstanden $y(t)$ avtar.) Farten til bilen er 25m/s.

Slutt