Noen eksempler om kontinuitet

I *Kalkulus* mangler det av en eller annen grunn eksempler på hvordan man bruker definisjonen til å vise at en funksjon er kontinuerlig. Hensikten med dette lille notatet er å supplere læreboken med noen slike eksempler. Jeg minner først om definisjonen slik den er formulert på side 182 i *Kalkulus*.

5.1.1 Definisjon. En funksjon f er *kontinuerlig* i et punkt $a \in D_f$ dersom følgende gjelder: For enhver $\epsilon > 0$, skal det finnes en $\delta > 0$ slik at når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Når vi skal vise at en funksjon f er kontinuerlig i et punkt a ved hjelp av denne definisjonen, er det størrelsen $x - a$ vi har kontroll på; vi ønsker å vise at vi kan få $|f(x - f(a)|$ mindre enn en hvilket som helst gitt feilmargin ϵ ved å velge $x - a$ tilstrekkelig liten. Siden det er $x - a$ vi kan kontrollere, lønner det seg å sette et eget navn på denne størrelsen. Vi setter derfor $h = x - a$ og observerer at da er $x = a + h$. Vi er nå klare til å se på et par eksempler.

Eksempel 1. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 5x + 2$ er kontinuerlig i punktet $a = 2$.

Som ovenfor innfører vi størrelsen $h = x - 2$ og observerer at $x = 2 + h$. Vi tenker oss nå at vi er gitt en $\epsilon > 0$, og at vi skal finne en $\delta > 0$ slik at når $|h| = |x - 2| < \delta$, så er $|f(x) - f(2)| < \epsilon$. La oss se litt nærmere på uttrykket $|f(x) - f(2)|$. Siden $x = 2 + h$, får vi:

$$|f(x) - f(2)| = |(5x + 2) - (5 \cdot 2 + 2)| = |5x - 10| = |5(2 + h) - 10| = 5|h|$$

Spørsmålet er altså om vi kan få dette uttrykket mindre enn ϵ ved å sørge for at $h = x - a$ er tilstrekkelig liten. Det kan vi! Hvis vi velger $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, ser vi at dersom $|h| = |x - a| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$, så er

$$|f(x) - f(2)| = 5|h| < 5 \cdot \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

Dermed har vi vist at f er kontinuerlig i punktet $a = 2$. ♠

Vi tar også med et litt mer komplisert eksempel.

Eksempel 2. Bruk definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen $f(x) = 2x^2 + 3$ er kontinuerlig i punktet $a = 3$.

Som vanlig innfører vi størrelsen $h = x - 3$ og observerer at $x = 3 + h$. Vi tenker oss nå at vi er gitt en $\epsilon > 0$, og at vi skal finne en $\delta > 0$ slik at når $|h| = |x - 3| < \delta$, så er $|f(x) - f(3)| < \epsilon$. Bruker vi at $x = 3 + h$, ser vi at

$$|f(x) - f(3)| = |(2x^2 + 3) - (2 \cdot 3^2 + 3)| = |2x^2 - 18| = |2(3 + h)^2 - 18|$$

$$= |2(3^2 + 2 \cdot 3h + h^2) - 18| = |12h + 2h^2| = |h||12 + 2h|$$

Vi må vise at vi kan få dette uttrykket mindre enn ϵ ved å velge h tilstrekkelig liten. Intuitivt er dette opplagt siden uttrykket $|h||12+2h|$ går mot 0 når h går mot 0. Spørsmålet er hvor liten må vi velge h for at dette uttrykket skal være mindre enn ϵ? Vi ser at når h er liten, er faktoren $12+2h$ omtrent lik 12. Hvis vi tar i litt for å være på den sikre siden, ser vi at $12+2h$ er mindre enn 14 når $|h|$ er mindre enn 1. Sørger vi samtidig for at det andre faktoren $|h|$ er mindre enn $\frac{\epsilon}{14}$, vil produktet $|h||12+2h|$ være mindre enn ϵ. Utifra disse betraktningene velger vi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{14}, 1\}$, altså δ lik det minste av de to tallene $\frac{\epsilon}{14}$ og 1 (normalt vil dette selvfølgelig være $\frac{\epsilon}{14}$, men det kunne jo tenkes at noen hadde valgt en stor verdi for ϵ).

La oss sjekke at dersom $h = |x-3| < \delta$, så er virkelig $|f(x) - f(3)| < \epsilon$. Det er lett. Etter regningene ovenfor har vi nemlig:

$$|f(x) - f(3)| = |h||12+2h| < \frac{\epsilon}{14} \cdot (12 + 2 \cdot 1) = \epsilon \qquad \spadesuit$$

La oss til slutt ta med et eksempel der vi bruker definisjonen til å vise at en funksjon *ikke* er kontinuerlig i et punkt.

Eksempel 3. Vis at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig i punktet $a = 0$.

Hvis du tegner grafen til denne funksjonen, ser du at $f(0) = 0$, men at $f(x)$ *ikke* går mot null (men mot 1) når x nærmer seg 0 ovenfra. Det betyr at dersom vi velger ϵ mindre enn 1 (f.eks. $\epsilon = \frac{1}{2}$), så vil det uansett hvor liten vi velger $\delta > 0$ finnes noen x slik at $|x - 0| < \delta$ og $|f(x) - f(0)| > \epsilon$ (nemlig alle *positive* x mindre enn δ). Siden det finnes ϵ-er som ikke kan pareres av noen δ, er funksjonen diskontinuerlig i $a = 0$. $\spadesuit$