10. november, 2001

MAT 100A: Mappeeksamen 4

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Vi bruker produktregelen:

$$f'(x) = 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

Siden x og $\arctan x$ har samme fortegn, og x^2 aldri er negativ, er $f'(x)$ positiv overalt, bortsett fra at $f'(0) = 0$. Ifølge Korollar 6.2.5 i *Kalkulus* er f strengt voksende på hvert av intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. For å vise at f er strengt voksende på hele $\mathbf{R}$, er det da nok å vise at hvis $x_1 < 0$ og $x_2 > 0$, så er $f(x_1) < f(x_2)$. Men det følger av at f er strengt voksende på hvert av intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. Det gir nemlig at $f(x_1) < f(0)$ og $f(0) < f(x_2)$, og følgelig er $f(x_1) < f(x_2)$.

Maplegrafen ligger på egen fil.

b) Vi bruker delvis integrasjon med $u = \arctan x$ og $v' = x^2$. Da er $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = \frac{x^3}{3}$, og vi får:

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx$$

Vi innfører nå $y = 1 + x^2$ som ny variabel. Da er $dy = 2x \, dx$, og vi får:

$$\int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{y-1}{y} \, dy = \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{y}) \, dy =$$

$$= \frac{1}{2}(y - \ln|y|) + C = \frac{1}{2}(1 + x^2 - \ln(1+x^2)) + C$$

Setter vi dette inn i uttrykket ovenfor, får vi:

$$\int x^2 \arctan x \, dx = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6}(1 + x^2 - \ln(1+x^2)) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$$

siden vi kan inkorporere leddet $-\frac{1}{6}$ i C-en.

c) Vi observerer først at $f(1) = 1^2 \cdot \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Følgelig er $g(\frac{\pi}{4}) = 1$. Vi bruker setning 7.4.6 i *Kalkulus*:

$$g'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \arctan(1) + \frac{1^2}{1+1^2}} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi + 1}$$

Oppgave 2

a) Figuren ligger på egen fil. Arealet er gitt ved

$$A = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Jeg løser først det ubestemte integralet $I = \int \sin^2 x \, dx$ siden dette integralet dukker opp flere steder senere i oppgavesettet. Bruker delvis integrasjon med $u = \sin x$, $v' = \sin x$, som gir $u' = \cos x$ og $v = -\cos x$:

$$I = \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin x \cos x + x - I + C$$

Løser vi denne ligningen for I, får vi

$$I = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C$$

Setter vi inn grensene, ser vi at

$$A = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \left[-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

b) Volumet til omdreiningslegemet er gitt ved

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$$

Vi løser integralet ved delvis integrasjon. Setter vi $u = x$ og $v' = \sin^2 x$, får vi $u' = 1$ og $v = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$ (husk integrasjonen ovenfor). Dette gir:

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \left[-\frac{1}{2} x \sin x \cos x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}) \, dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \left[-\frac{1}{4} \sin^2 x + \frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

Dermed er

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx = 2\pi \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{2}$$

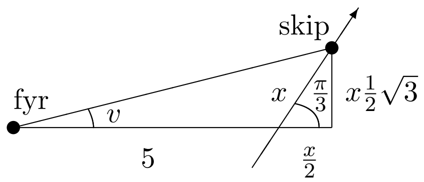
c) Både teller og nevner går mot 0, så vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{\arcsin(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x \cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x} = \lim_{x\to 0^+} \cos x \cdot \sqrt{1-x^4} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

I dette uttrykket er de to første faktorene "ufarlige" og går begge mot 1. Den tredje faktoren er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk som vi kjenner fra før, og som også har grenseverdi 1 (husker du ikke dette, er det lett å bruke L'Hôpitals regel en gang til: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1$). Dermed har vi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{\arcsin(x^2)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Oppgave 3



a) Ved å bruke at $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ og $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, får vi målene på figuren ovenfor. Ved definisjonen av tangens er da

$$\tan v = \frac{x\frac{1}{2}\sqrt{3}}{5 + \frac{x}{2}} = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$$

b) Vi deriverer begge sider av ligningen $\tan v = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$ med hensyn på t. Først venstresiden:

$$\frac{d}{dt}(\tan v) = \frac{1}{\cos^2 v} \cdot v'(t)$$

og så høyresiden:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x\sqrt{3}}{x+10}\right) = \frac{\sqrt{3}\cdot(x+10) - x\sqrt{3}\cdot 1}{(x+10)^2} \cdot x'(t) = \frac{10\sqrt{3}}{(x+10)^2} \cdot x'(t)$$

Disse uttrykkene må være like, så:

$$\frac{1}{\cos^2 v} \cdot v'(t) = \frac{10\sqrt{3}}{(x+10)^2} \cdot x'(t)$$

Løser vi denne ligningen for $x'(t)$, får vi:

$$x'(t) = \frac{(x+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{v'(t)}{\cos^2 v}$$

c) Vi må først finne ut hvor lang x er når $v = \frac{\pi}{6}$. Vi setter $v = \frac{\pi}{6}$ inn i ligningen $\tan v = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$$

Løser for x og får $x = 5$. Vi setter nå $x = 5$, $v = \frac{\pi}{6}$ og $v' = 1$ inn i formelen for $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{(5+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{(5+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = 10\sqrt{3} \approx 17.3$$

Skipet seiler altså med en fart på ca. 17 knop (dvs. nautiske mil per time).

Oppgave 4

a) Siden $f'(x) > 0$ for alle x, er f strengt voksende. Det betyr at f er injektiv, og følgelig har f en omvendt funksjon g.

For å utlede formelen, delvis integrerer vi med $u = f(x)$ og $v' = 1$. Da er $u' = f'(x)$ og $v = x$. Dette gir

$$\int_a^b f(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b xf'(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)\,dx$$

Vi skifter nå variabel i det siste integralet ved å sette $y = f(x)$. Da er $x = g(y)$ (der g er den omvendte funksjonen til f) og $dx = f'(x)\,dx$. Vi ser dessuten at når $x = a$, så er $y = f(a)$, og når $x = b$, er $y = f(b)$. Dermed har vi:

$$\int_a^b xf'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

Kombinerer vi dette med uttrykket ovenfor, får vi den ønskede formelen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

b) Vi skal bruke formelen ovenfor med $f(x) = \arcsin x$. Da er $g(y) = \sin^2 x$. Vi ser også at $f(0) = 0$ og $f(\frac{1}{4}) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Dermed har vi

$$\int_1^{\frac{1}{4}} \arcsin(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6} - 0\cdot 0 - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 y\,dy = \frac{\pi}{24} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 y\,dy$$

Vi vet fra oppgave 2a) at

$$\int \sin^2 y\,dy = -\frac{1}{2}\sin y\cos y + \frac{y}{2} + C$$

Følgelig er

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 y\, dy = \left[-\frac{1}{2}\sin y \cos y + \frac{y}{2} + C\right]_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$$

Dermed er

$$\int_1^{\frac{1}{4}} \arcsin(\sqrt{x})\, dx = \frac{\pi}{24} - (-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}$$

c) Figuren nedenfor viser at rektangelet med sider b og $f(b)$ kan deles inn i tre deler. Området A_1 under grafen har areal $\int_a^b f(x)\,dx$, området A_2 til venstre for grafen har areal $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$ (tenk på den geometriske tolkningen av omvendte funksjoner), og rektangelet A_3 nederst i venstre hjørne har areal $af(a)$. Følgelig er

$$bf(b) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy + af(a)$$

Snur vi om på denne, får vi formelen vi er på jakt etter. Et helt tilsvarende resonnement viser at vi får den samme formelen om $a > b$.