13. november, 2000

Fasit til obligatorisk oppgave i MAT 100A

Oppgave 1

a) Grensen er et $\frac{0}{0}$-uttrykk, og vi bruker l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(\cos \frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{(-\sin \frac{\pi x}{2})\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(-1)\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

b) Vi må først skrive uttrykket på eksponentiell form:

$$(\sin x)^{\frac{2}{\ln x}} = (e^{\ln(\sin x)})^{\frac{2}{\ln x}} = e^{\frac{2\ln(\sin x)}{\ln x}}$$

Vi regner så ut grensen av eksponenten. Den er et $\frac{\infty}{\infty}$-uttrykk, og vi kan bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(\sin x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = 2.$$

Dette betyr at

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{2}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2\ln(\sin x)}{\ln x}} = e^2$$

I den siste overgangen bruker vi at eksponentialfunksjonen er kontinuerlig.

c) Vi substituerer $z = \sqrt{x}$ som gir $x = z^2$ og $dx = 2z\,dz$. Dette gir

$$I = \int \sqrt{x}\sin(\sqrt{x})\,dx = \int 2z^2 \sin z\,dz$$

Vi fortsetter med delvis integrasjon. Setter vi $u = 2z^2$, $v' = \sin z$, får vi $u' = 4z$ og $v = -\cos z$. Dermed er

$$I = -2z^2\cos z + \int 4z\cos z\,dz$$

Vi bruker delvis integrasjon en gang til med $u = 4z$, $v' = \cos z$. Da er $u' = 4$, $v = \sin z$, og vi får:

$$I = -2z^2\cos z + 4z\sin z - \int 4\sin z\,dz$$

$$= -2z^2\cos z + 4z\sin z + 4\cos z + C$$

Setter vi inn $z = \sqrt{x}$, får vi til slutt:

$$I = -2x\cos(\sqrt{x}) + 4\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 4\cos(\sqrt{x}) + C$$

d) Den deriverte av nevneren er $(x^2+4x+6)' = 2x+4$. Vi smugler dette uttrykket inn i telleren:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+6}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+6}\,dx$$

I det første integralet substituerer vi $u = x^2+4x+6$. Da er $du = (2x+4)\,dx$, og vi får:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + C$$

I det andre integralet fullfører vi kvadratet i nevneren:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+4x+6}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+2}$$
$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x+2}{\sqrt{2}})^2+1}$$

Setter vi $u = \frac{x+2}{\sqrt{2}}$, $du = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, får vi:

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan u + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+2}{\sqrt{2}}) + C$$

Dermed får vi:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+2}{\sqrt{2}}) + C$$

Oppgave 2

a) Vi lar r_1 og θ_1 være modulus og argument til z, og vi lar r_2 og θ_2 være modulus og argument til w. Da er $r_1 = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Videre er $\sin\theta_1 = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden z ligger i første kvadrant, er $\theta_1 = 45°$. Tilsvarende har vi for w: $r_2 = |w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$. Videre er $\sin\theta_2 = \frac{-1}{2}$. Siden w ligger i fjerde kvadrant, er $\theta_2 = -30°$.

b) Vi regner ut:

$$zw = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} - i^2 = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i.$$

Nå vet vi at $|zw| = |z||w| = 2\sqrt{2}$. Videre vet vi at argumentet til zw er $\theta_1+\theta_2 = 45° + (-30°) = 15°$. Det følger at

$$zw = 2\sqrt{2}\,(\cos 15° + i\sin 15°) = \sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i.$$

Derfor blir

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

og

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

Oppgave 3

a) I uke n er det x_n syke. De syke kan deles i to grupper. Den ene gruppen består av dem som var syke forrige uke (og som fortsatt er det), og det er $\frac{1}{4}x_{n-1}$ personer. Den andre gruppen består av dem som ble smittet for to uker siden, og det er $\frac{5}{4}x_{n-2}$ personer. Dette betyr at $x_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{5}{4}x_{n-2}$. Flytter vi over, får vi differensligningen.

For å løse differensligningen ser vi på den karakteristiske ligningen $r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{5}{4} = 0$. Den har løsningene

$$r = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 4 \cdot \frac{5}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \frac{9}{4}}{2} = \begin{cases} \frac{5}{4} \\ -1 \end{cases}$$

Den generelle løsningen av differensligningen er dermed

$$x_n = C(-1)^n + D(\frac{5}{4})^n$$

b) Vi må finne den løsningen av differensligningen som tilfredsstiller $x_0 = 190$ og $x_1 = 260$. Vi må altså finne konstanter C og D slik at

$$190 = x_0 = C + D(\frac{5}{4})^0 = C + D$$

$$260 = x_0 = (-1)C + D(\frac{5}{4})^1 = -C + \frac{5}{4}D$$

Løser vi dette ligningssettet, får vi $C = -10$ og $D = 200$. Antall syke etter n uker er dermed

$$x_n = -10(-1)^n + 200(\frac{5}{4})^n$$

Siden $\lim_{n\to\infty}(\frac{5}{4})^n = \infty$, vokser antall syke over alle grenser når $n \to \infty$ (modellen må derfor være av begrenset gyldighet!).

c) Differensligningen blir nå $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{3}{4}x_{n-2} = 0$. Den karakteristiske ligningen $r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{3}{4} = 0$ har løsningene

$$r = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 4 \cdot \frac{3}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Den generelle løsningen av differensligningen er dermed $x_n = C + D(-\frac{3}{4})^n$. For å finne C og D, løser vi ligningene

$$190 = x_0 = C + D(\frac{3}{4})^n = C + D$$

$$260 = C - D(\frac{3}{4})^1 = C - D\frac{3}{4}$$

og får $C = 230$, $D = -40$. Dette gir

$$x_n = 230 - 40(\frac{3}{4})^n$$

Siden $\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{4})^n = 0$, ser vi at antall syke stabiliserer seg rundt 230 når tiden går.

Dersom hver syk smitter et antall q mindre enn $\frac{3}{4}$ per uke, blir differensligningen $x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - qx_{n-2} = 0$. I dette tilfellet viser det seg at begge røttene r_1 og r_2 i den karakteristiske ligningen har absoluttverdi mindre enn 1. Det betyr at alle løsninger $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ går mot null når n går mot uendelig. Sykdommen dør derfor ut.

For å vise at absoluttverdiene til r_1 og r_2 er mindre enn 1, observerer vi først at den karakteristiske ligningen $r^2 - \frac{1}{4}r - q = 0$ har løsningene

$$r = \frac{\frac{1}{4} \pm \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 4q}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+64q}}{8}$$

Vi setter $r_1 = \frac{1+\sqrt{1+64q}}{8}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{1+64q}}{8}$. Siden $q < \frac{3}{4}$, er $\sqrt{1+64q} < \sqrt{1 + 64 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{49} = 7$. Dette medfører at $r_1 < 1$ og $r_2 \geq -\frac{6}{8} > -1$. Vi ser også at $r_1 > 0$ og $r_2 < 0$ (husk at $q \geq 0$), og dermed er resonnementet fullført.

Oppgave 4

a) Vi deriverer

$$(\frac{\log x}{x})' = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Nevneren er alltid positiv. Videre er $x = e$ det eneste nullpunktet til telleren, og der skifter telleren fortegn fra å være positiv til å bli negativ. Funksjonen vår er derfor voksende på $(0, e]$ og avtagende på $[e, \infty)$.

b) Vi deriverer funksjonen en gang til:

$$(\frac{1 - \log x}{x^2})' = \frac{x^2(-1/x) - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{x(2\log x - 3)}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}.$$

Telleren i denne brøken er positiv når $\log x > \frac{3}{2}$, dvs. når $x > e^{\frac{3}{2}}$, og negativ når $\log x < \frac{3}{2}$, dvs. når $x < e^{\frac{3}{2}}$. Konklusjonen blir at f er konkav på $(0, e^{\frac{3}{2}}]$ og konveks på $[e^{\frac{3}{2}}, \infty)$.

c) Siden $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ og $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, er

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = -\infty$$

Den andre grensen tar vi med L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Bruk lommeregner eller Maple for å skaffe deg et godt bilde av grafen (siden grafen er ganske flat, kan det lønne seg å eksperimentere litt med skalaene på aksene).

d) Arealet er gitt ved $A = -\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$. Siden $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, er dette et uegentlig integral. Vi må derfor først regne ut $\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\, dx$ og så la $a \to 0^+$. Setter vi $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\, dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Dermed får vi:

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \left[0 - \frac{(\ln a)^2}{2} \right] = -\infty$$

Arealet er altså uendelig.

e) Volumet er gitt ved $V = \pi \int_1^e (\frac{\ln x}{x})^2\, dx = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$. Vi bruker delvis integrasjon med $u = \ln^2 x$ og $v' = \frac{1}{x^2}$. Da er $u' = \frac{2\ln x}{x}$ og $v = -\frac{1}{x}$, og vi får:

$$V = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx = -\left[\frac{\pi \ln^2 x}{x} \right]_1^e + \pi \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\, dx$$

$$= -\frac{\pi}{e} + \pi \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\, dx$$

Vi bruker nå delvis integrasjon med $u = 2\ln x$, $v' = \frac{1}{x^2}$. Da er $u' = \frac{2}{x}$ og $v = -\frac{1}{x}$, og vi får:

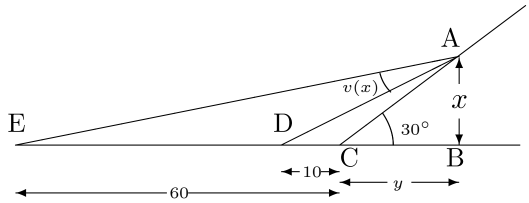
$$V = -\frac{\pi}{e} + \pi \int_1^e \frac{2\ln x}{x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{e} + \pi \left[-\frac{2\ln x}{x} \right]_1^e + \pi \int_1^e \frac{2}{x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{e} - \frac{2\pi}{e} - \pi \left[\frac{2}{x} \right]_1^e = -\frac{3\pi}{e} - \frac{2\pi}{e} + 2\pi = 2\pi - \frac{5\pi}{e}$$

Oppgave 5

a) Vi setter navn på punktene som vist på figuren nedenfor.



Vi ser at vinkel $v(x)$ er lik differansen mellom $\angle EAB$ og $\angle DAB$. Disse vinklene inngår i rettvinklede trekanter, og er derfor lette å beregne. Før vi starter for alvor, trenger vi avstanden y fra B til C. Siden $\frac{x}{y} = \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, får vi $y = \sqrt{3}x$.

Vi kan nå finne $\angle EAB$ og $\angle DAB$:

$$\tan(\angle EAB) = \frac{60 + x\sqrt{3}}{x}$$

$$\tan(\angle DAB) = \frac{10 + x\sqrt{3}}{x}$$

Dermed er

$$\angle EAB = \arctan(\frac{60 + x\sqrt{3}}{x})$$

$$\angle DAB = \arctan(\frac{10 + x\sqrt{3}}{x})$$

Følgelig er

$$v(x) = \angle EAB - \angle DAB = \arctan(\frac{60 + x\sqrt{3}}{x}) - \arctan(\frac{10 + x\sqrt{3}}{x}) =$$

$$= \arctan(\frac{60}{x} + \sqrt{3}) - \arctan(\frac{10}{x} + \sqrt{3})$$

b) Derivasjon gir

$$v'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{60}{x} + \sqrt{3})^2}(-\frac{60}{x^2}) - \frac{1}{1 + (\frac{10}{x} + \sqrt{3})^2}(-\frac{10}{x^2})$$

$$= \frac{-60}{4x^2 + 2 \cdot 60\sqrt{3}x + 60^2} + \frac{10}{4x^2 + 2 \cdot 10\sqrt{3}x + 10^2}$$

$$= \frac{25(150 - x^2)}{2(x^2 + 30\sqrt{3}x + 900)(x^2 + 5\sqrt{3}x + 25)}$$

c) Av uttrykket ovenfor ser vi at $v'(x) = 0$ når $x = \sqrt{150}$. Det er lett å sjekke at dette er et minimumspunkt.

Oppgave 6
Vi skal se på to måter å løse denne oppgaven på:

Første metode: Tegn grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$ fra 1 til $n+1$. Del opp intervallet $[1, n+1]$ med partisjonen $\Pi = \{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ og se på den øvre trappesummen $\O(\Pi) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Denne øvre trappesummen må være større enn integralet $\int_1^{n+1} f(x)\, dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$ (husk at integralet er definert som infimum over alle øvre trappesummer). Dermed er

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

og beviset er fullført.

Andre metode: Vi bruker induksjon på påstanden

$$P_n : \; 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n} > \ln(n+1)$$

Siden $\ln(1+1) = \ln(2) < \ln(e) = 1$, er P_1 sann. Vi antar nå at P_k er sann og skal vise at P_{k+1} også må være sann. Med andre ord vet vi at

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} > \ln(k+1)$$

og skal vise at

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1} > \ln(k+2)$$

Ved induksjonsantagelsen får vi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1} > \ln(k+1) + \frac{1}{k+1}$$

så vi er fremme om vi kan vise at $\ln(k+1) + \frac{1}{k+1} \geq \ln(k+2)$, dvs. at $\ln(k+2) - \ln(k+1) \leq \frac{1}{k+1}$. Vi skal bruke middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = \ln x$ over intervallet $[k+1, k+2]$. Denne setningen sier at

$$\frac{f(k+2) - f(k+1)}{(k+2) - (k+1)} = f'(c)$$

for en $c \in (k+1, k+2)$. Setter vi inn hva f og f' er, får vi:

$$\ln(k+2) - \ln(k+1) = f'(c) = \frac{1}{c}$$

for en $c \in (k+1, k+2)$. Siden $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{k+1}$, er vi ferdige.