Utvidet fasit til eksamen i MAT 1100 — Januar 2005

DEL 1

1. (3 poeng) Integralet $\int \frac{x}{\sin^2(x^2)}\,dx$ er lik:

☐ $\frac{1}{2}\tan(x^2) + C$
☐ $\frac{1}{2}\arccos(x^2) + C$
☐ $-\frac{1}{2}\cot(x^2) + C$
☐ $-\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos^2(x^2)} + C$
☐ $-\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$

Riktig svar: c) $-\frac{1}{2}\cot(x^2) + C$
Hint: Sett $u = x^2$.

2. (3 poeng) Når vi skal løse integralet $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$ ved delbrøkoppspalting, setter vi integranden lik:

☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
☐ må først polynomdividere
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x+2)^2}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x^2+2x+2}$

Riktig svar: b) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
Hint: Se *Kalkulus* side 399.

3. (3 poeng) Integralet $\int \arctan x\,dx$ er lik:

☐ $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
☐ $(x+1)\arctan x + C$
☐ $(x + \frac{x^2}{2})\arctan x + C$
☐ $x\arctan x - \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) + C$
☐ $-\ln|\cos x| + C$

Riktig svar: a) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
Hint: Bruk delvis integrasjon med $u = \arctan x$, $v' = 1$.

4. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y,z) = z\arcsin(xy)$?

☐ $zx\arccos(xy)$
☐ $-\frac{xz}{\sin^2(xy)}$
☐ $\frac{xz}{1+x^2y^2}$
☐ $zx\tan(xy)$
☐ $\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

Riktig svar: e) $\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

5. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x, y, z) = x^2 z + yz$ raskest i punktet $(1, 2, 3)$?

☐ $(0, 2, 1)$
☐ $(3, 1, 2)$
☐ $(3, 4, 3)$
☐ $(6, 3, 3)$
☐ $(9, 4, 1)$

Riktig svar: d) $(6, 3, 3)$
Hint: Funksjonen stiger raskest i gradientens retning.

6. (3 poeng) Funksjonen $f(x, y) = xy + x - y$ har et stasjoært punkt i:

☐ $(1, 4)$
☐ $(0, 0)$
☐ $(0, 1)$
☐ $(1, -1)$
☐ $(-\pi, 1)$

Riktig svar: d) $(1, -1)$
Hint: Finn punktene der begge de partiellderiverte er null.

7. (3 poeng) Funksjonen $f(x, y)$ har kontinuerlige annenderiverte. Vi vet at $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1, 0) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1, 0) = 4$. Da kan vi slutte at:

☐ $(1, 0)$ er et lokalt minimum
☐ annenderivertesten gir ingen konklusjon
☐ $(1, 0)$ er et sadelpunkt
☐ kan ikke si noe siden vi ikke kjenner $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0)$
☐ $(1, 0)$ er et lokalt maksimum

Riktig svar: c) sadelpunkt
Hint: Bruk annenderiverttesten med $A = 2$, $B = 5$, $C = 4$ og $D = AC - B^2 = 8 - 25 = -17$

8. (3 poeng) Buelengden til funksjonen $f(x) = \arctan x$ fra $x = 0$ til $x = 1$ er lik:

☐ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{1+x^2}\, dx$
☐ $\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{1 + \arctan^2 x}\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^4 x}}\, dx$

Riktig svar: a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{1+x^2}\, dx$
Hint: Bruk formelen $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

9. (3 poeng) Den deriverte til $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\arctan t}{t}\, dt$ er:

☐ $\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

☐ $\frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2}$
☐ $\frac{\arctan(x)}{x}$
☐ $\arctan(\sqrt{x})$
☐ $\frac{\arctan(\sqrt{x})}{2x}$

Riktig svar: e) $\frac{\arctan(\sqrt{x})}{2x}$
Hint: Sett $G(u) = \int_1^u \frac{\arctan t}{t}\, dt$. Da er $G'(u) = \frac{\arctan u}{u}$ ved analysens fundamentalteorem, og vi kan derivere $F(x) = G(\sqrt{x})$ ved kjerneregelen.

10. (3 poeng) $f(u, v) = uv^2$ er en funksjon av to variable. Dersom $g(x, y) = e^{xy^2}$ og $h(x, y) = x^2y^3$, hva er da $\frac{\partial k}{\partial y}$ der $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$?

☐ $2x^5y^7e^{xy^2}$
☐ $6x^4y^5e^{xy^2}$
☐ $2xye^{xy^2} + 3x^2y^2$
☐ $2x^5y^7e^{xy^2} + 6x^4y^5e^{xy^2}$
☐ $5xye^{x^2y^4} + 3x^4y^5e^{x^3y^6}$

Riktig svar: d) $2x^5y^7e^{xy^2} + 6x^4y^5e^{xy^2}$
Hint: Bruk kjerneregelen i flere variable.

DEL 2

Oppgave 1:
a) (10 poeng) Vis at $1 + i\sqrt{3}$ er en rot i $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$. Hvilket annet tall kan du da uten regning si er rot i $P(z)$?

b) (10 poeng) Finn den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$.

Svar:

a) Den konjugerte $1 - i\sqrt{3}$ er også en rot.

b)

$$z^4 + 4z^2 + 16 = (z^2 - 2z + 4)(z^2 + 2z + 4) =$$
$$= (z - (1 + i\sqrt{3}))(z - (1 - i\sqrt{3}))(z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3}))$$

Oppgave 2:
a) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int \frac{u + 2}{u^2 + 2u + 5}\, du$$

b) (10 poeng) Finn konstanter A, B, C slik at

$$\frac{1}{u(u^2 + 2u + 5)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 2u + 5}$$

c) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x + 2\cos x + 5}\, dx$$

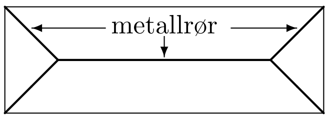
<u>Svar:</u>

a) $\frac{1}{2}\ln(u^2 + 2u + 5) + \frac{1}{2}\arctan\frac{u+1}{2} + C$
<u>Hint:</u> Smugle først den deriverte av nevneren inn i telleren. Fullfør deretter kvadratet i nevneren.

b) $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = -\frac{2}{5}$.

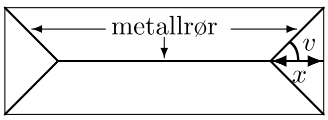
c) $\frac{1}{5}\ln|\cos x| - \frac{1}{10}\ln(\cos^2 x + 2\cos x + 5) - \frac{1}{10}\arctan(\frac{\cos x + 1}{2}) + C$
<u>Hint:</u> Skriv $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ og sett $u = \cos x$.

Oppgave 3: (10 poeng) På figuren ser du undersiden av en rektangulær bordplate. Bordplaten er 3 meter lang og 1 meter bred. Den er forsterket av metallrør som går midt under bordet og ut til hvert hjørne slik du ser på figuren. Firmaet som produserer bordene, ønsker at den totale lengden til rørene skal være så liten som mulig. Hva er det minste denne lengden kan være?



<u>Svar:</u> $3 + \sqrt{3}$.
<u>Hint:</u> Bruker man variabelen x vist på figuren nedenfor, blir den totale lengden som skal minimeres

$$l(x) = 3 - 2x + 4\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$$



Bruker man isteden vinkelen v på figuren, blir uttrykket som skal minimeres

$$l(v) = 3 - \cot v + \frac{2}{\sin v}$$

Det siste utrykket gir noe greiere regninger, men er kanskje litt mindre naturlig å sette opp.

Oppgave 4: (10 poeng) Vi ser på et reelt polynom

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

der graden n er et partall. Vis at $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ og at $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \infty$. Vis deretter at det finnes et tall K slik at $P(x) > K$ for alle $x \in \mathbf{R}$.

Hint: I første del setter du x^n utenfor en parentes. I andre del bruker du ekstremalverdisetningen (men på hvilket intervall?).

SLUTT