Prøveeksamen i MAT 1100 — Høst 2006

Denne prøveeksamenen har samme format som den "egentlige" eksamenen, dvs. en første del bestående av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver, og en annen del bestående av 7 deloppgaver som teller 10 poeng hver (i tillegg finnes det to "bonus-spørsmål" som ikke er del av prøveeksamen, men som det likevel kan være greit å bryne seg på). Innholdsmessig skiller imidlertid prøveeksamen seg noe fra ordinær eksamen. På prøveeksamen er nesten alle spørsmålene hentet fra andre del av pensum (dvs. fra det stoffet vi har gjennomgått etter underveiseksamen). På den egentlige eksamenen vil alle flervalgsoppgaver være hentet fra andre del av pensum, mens de åpne oppgavene vil dekke hele pensum. Jeg har valgt en litt "skjev" vektlegging på prøveeksamen fordi jeg mener det er størst behov for trening i andre del av pensum. Eksamenssettene fra 2003 og 2004 inneholder et godt utvalg av aktuelle oppgavetyper fra første del av pensum. Jeg har heller ikke "finberegnet" tiden på prøveeksamen, så det kan hende at det er litt for mye å gjøre på tre timer.

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y,z) = y\cos(xyz^2)$?

☐ $\cos(xyz^2) - y\sin(xyz^2)$
☐ $xz^2\sin(xyz^2)$
☐ $\cos(xyz^2) - y^2z^2\sin(xyz^2)$
☐ $-y^2z^2\sin(xyz^2)$
☐ $\cos(xyz^2) - xyz^2\sin(xyz^2)$

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y) = x^2e^{xy}$ raskest i punktet $(2,-1)$?

☐ $(0,1)$
☐ $(1,4)$
☐ $(4,-1)$
☐ $(1,0)$
☐ $(2,1)$

3. (3 poeng) Integralet $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ er lik:

☐ $\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$
☐ $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$
☐ $-\frac{1}{2}\cot(x^2) + C$
☐ $x\ln\sqrt{1-x^4} + C$
☐ $\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

4. (3 poeng) Når vi skal løse integralet $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)^2}\,dx$ ved delbrøkoppspalting, setter vi integranden lik:

☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
☐ $\frac{Ax+B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
☐ må først polynomdividere
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{(x^2+2x+2)^2}$

5. (3 poeng) Integralet $\int x \ln x \, dx$ er lik:

☐ $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + C$
☐ $\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$
☐ $\frac{x^2}{2}(x \ln x - x) + C$
☐ $x \ln x - x + C$
☐ $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

6. (3 poeng) Den inverse matrisen til $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

7. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = \cos x$ der $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dreies én gang om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er:

☐ π^2
☐ $\pi^2 - 2\pi$
☐ $\pi - 2$
☐ 2
☐ $2\pi^3$

8. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}$ er lik:

☐ $\frac{e}{2}$
☐ $1 - \ln 2$
☐ integralet divergerer
☐ 2
☐ $e - \ln 2$

9. (3 poeng) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er to deriverbare funksjoner av flere variable. Anta at $\mathbf{G}(1, 2) = (1, -3, 0)$ og at

$$\mathbf{G}'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{F}'(1,-3,0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dersom $\mathbf{H}$ er den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$, så følger det at:

☐ $\mathbf{H}'(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 1 \\ 13 & -14 & 1 \\ 10 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
☐ $\mathbf{H}'(1,-3,0) = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 1 \\ 13 & -14 & 1 \\ 10 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
☐ Ingen ting; vi må i tillegg ha informasjon om hvordan funksjonene oppfører

seg i nærheten av punktene $(1,2)$ og $(1,-3,0)$

☐ $\mathbf{H}'(1,-3,0) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{H}'(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$

10. (3 poeng) $T(x,y,z)$ er temperaturen i et punkt (x,y,z) i havet. Et mikroskopisk dyr beveger seg slik at det alltid befinner et sted der temperaturen er $20°C$. Posisjonen til dyret ved tiden t er $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Da vet vi at:

☐ Dyret svømmer i en sirkel

☐ $\nabla T(\mathbf{r}(t))$ står alltid normalt på hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

☐ $\nabla T(\mathbf{r}(t))$ er alltid parallell med hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

☐ $|\nabla T(\mathbf{r}(t))| = 20$ for alle t

☐ $\nabla T(\mathbf{r}(t)) = 20\,\mathbf{r}(t)$ for alle t

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn alle (reelle og komplekse) tredjerøtter til -8. Finn også den reelle og den komplekse faktoriseringen til polynomet $P(z) = z^3 + 8$.

b) (10 poeng) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{6x}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

c) (10 poeng) Løs integralet $\int \frac{6x}{x^3+8}\,dx$

d) (BONUSSPØRSMÅL) Løs integralet $\int \frac{\ln(x^3+8)}{x^2}\,dx$.

Oppgave 2

Et dyreslag har en maksimal levealder på fire år. Dyr regnes som *unger* det første året de lever, som *unge voksne* det andre året de lever, som *fullvoksne* det tredje året de lever, og som *eldre* det fjerde året de lever.

En unge har 50% sjanse for å overleve til året etter, en ung voksen har 75% sjanse for å overleve til året etter, og en fullvoksen har 50% sjanse for å overleve til året etter. I tillegg regner man at en ung voksen i gjennomsnitt gir opphav til 0.5 unger som blir født året etter, at hver fullvoksen i gjennomsnitt gir opphav til 2 unger som blir født året etter, og at hvert eldre dyr i gjennomsnitt gir opphav til 0.5 unger som blir født året etter.

a) (10 poeng) La x_n, y_n, z_n, u_n være henholdsvis antall unger, antall unge voksne, antall fullvoksne og antall eldre etter n år, og la $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}$ Finn en matrise A slik at $\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvor mange dyr er det i hver aldersgruppe etter $n+1$ år dersom $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$?

b) (10 poeng) Anta $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ er en generell vektor. Finn en vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$.

c) (10 poerng) Finn den inverse matrisen til A. Du har ikke lov til å bruke et lommeregnerprogram til å finne A^{-1}, men må vise hvilke ligninger du har satt opp og hvordan du har tenkt.

d) (BONUSSPØRSMÅL — litt på kanten av pensum?) Egenverdien til A med størst tallverdi er (tilnærmet lik) 1.032 og en tilhørende egenvektoren er (tilnærmet lik)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.41 \\ 0.30 \\ 0.14 \end{pmatrix}$$

Hvordan vil det gå med den prosentvise fordelingen mellom de fire aldersklassene etter hvert som tiden går? Hvor stor veksthastighet vil bestanden ha i det lange løp? (Du kan anta at enhver vektor kan skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorer.)

Oppgave 3
I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{hvis } (x,y) \neq \mathbf{0} \\ \\ 0 & \text{hvis } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

a) (10 poeng) Bruk definisjonen av partiellderivert til å finne $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})$. Finn deretter de retningsderiverte $f'(\mathbf{0}, \mathbf{r})$, der $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ er en vektor med $r_1 \neq 0$ og $r_2 \neq 0$. Holder

$$f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$$

for alle $\mathbf{r}$?

b) (10 poeng) Vis at f ikke er kontinuerlig i $\mathbf{0}$. Er f deriverbar i $\mathbf{0}$?

SLUTT