Løsningsforslag til underveiseksamen i MAT 1100, H-06

1. (2 poeng) Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = 4$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da er z lik:

☐ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
☐ $-2 + 2i\sqrt{3}$
☐ $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
☐ $-2\sqrt{3} + 2i$

Riktig svar: c) $-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

Begrunnelse: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2. (2 poeng) Det komplekse tallet $z = 3 - 3i\sqrt{3}$ har polarkoordinater:

☐ $r = 6, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 6, \theta = \frac{\pi}{3}$
☐ $r = \sqrt{18}, \theta = \frac{4\pi}{3}$
☐ $r = i\sqrt{18}, \theta = \frac{5\pi}{3}$
☐ $r = 6, \theta = \frac{11\pi}{12}$

Riktig svar: a) $r = 6, \theta = \frac{5\pi}{3}$

Begrunnelse: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$. Videre er $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Siden z ligger i fjerde kvadrant, gir dette $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

3. (2 poeng) Dersom $z = \frac{7+i}{1+3i}$, så er:

☐ $z = -\frac{5}{4} - \frac{5}{2}i$
☐ $z = 2 - i$
☐ $z = \frac{22}{5} + \frac{11}{5}i$
☐ $z = \frac{2}{5} - 2i$
☐ $z = 1 - 2i$

Riktig svar: e) $1 - 2i$

Begrunnelse: $z = \frac{7+i}{1+3i} = \frac{(7+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7-21i+i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{10-20i}{10} = 1 - 2i$.

4. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arctan(e^x)$ er:

☐ $\frac{e^x}{1+x^2}$
☐ $\frac{e^x}{\arccos(e^x)}$
☐ $\frac{1}{1+e^{2x}}$
☐ $\tan(e^x)$
☐ $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Riktig svar: e) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Begrunnelse: Bruker kjerneregelen: $f'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}(e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

5. (2 poeng) Den deriverte til $f(x) = x\cot(x^2)$ er:

- ☐ $\frac{2x}{\sin(x^2)}$
- ☐ $\cot(x^2) + 2x^2\tan(x^2)$
- ☐ $\cot(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}$
- ☐ $\cot(x^2) - \frac{2x^2}{\sin^2(x^2)}$
- ☐ $\tan(x^2)$

Riktig svar: d) $\cot(x^2) - \frac{2x^2}{\sin^2(x^2)}$
Begrunnelse: Kombinerer produktregelen og kjerneregelen:

$$f'(x) = 1 \cdot \cot(x^2) + x\left(-\frac{1}{\sin^2(x^2)}\right)2x = \cot(x^2) - \frac{2x^2}{\sin^2(x^2)}$$

6. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5-2n^3+3}{4n^2-3n^3-2n^5}$ er lik:

- ☐ $-\frac{7}{2}$
- ☐ $-\infty$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{7}{4}$
- ☐ $\frac{3}{4}$

Riktig svar: a) $-\frac{7}{2}$
Begrunnelse: Trekker ut høyeste potens i teller og nevner: $\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5-2n^3+3}{4n^2-3n^3-2n^5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5(7-2n^{-2}+3n^{-5})}{n^5(4n^{-3}-3n^{-2}-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{7-2n^{-2}+3n^{-5}}{4n^{-3}-3n^{-2}-2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$.

7. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ er lik:

- ☐ $-\frac{2}{3}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ ∞
- ☐ 0
- ☐ 1

Riktig svar: b) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Multipliserer med den konjugerte oppe og nede:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x^{-1}}+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-1}}+1} = \frac{1}{2}$$

8. (2 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x}$ er lik:

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 0
- ☐ ∞
- ☐ 3
- ☐ 1

Riktig svar: d) 3
Begrunnelse: Dette er et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk, så vi kan bruke L'Hôpitals regel: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}}{1} = 3$.

9. (2 poeng) Den omvendte funksjonen til $f(x) = e^{2x} + 3$ er:

- ☐ $g(x) = \frac{1}{e^{2x}+3}$
- ☐ Det finnes ingen omvendt funksjon
- ☐ $g(x) = \ln(\frac{x-3}{2})$
- ☐ $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{3}$
- ☐ $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x-3)$

Riktig svar: e) $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x-3)$
Begrunnelse: Løser ligningen $y = e^{2x} + 3$ for x:

$$y = e^{2x} + 3 \Longrightarrow e^{2x} = y - 3 \Longrightarrow 2x = \ln(y-3) \Longrightarrow x = \frac{\ln(y-3)}{2}$$

Altså er $g(x) = \frac{1}{2}\ln(x-3)$.

10. (2 poeng) Funksjonen f har en omvendt funksjon g. Dersom vi vet at $f(1) = 4$ og $f'(1) = 3$, så vet vi også at:

- ☐ $g'(\frac{1}{3}) = 4$
- ☐ $g'(1) = \frac{1}{3}$
- ☐ $g'(3) = 4$
- ☐ $g'(4) = \frac{1}{3}$
- ☐ $g'(4) = 3$

Riktig svar: d) $g'(4) = \frac{1}{3}$
Begrunnelse: Vi vet at $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ der $y = f(x)$. Med $x = 1$, $y = 4$ gir dette $g'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$.

11. (3 poeng) Den deriverte til $x^{\cos x}$ er lik:

- ☐ $\cos(x)x^{\cos x - 1}$
- ☐ $-x^{\cos x}\sin x$
- ☐ $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$
- ☐ $e^{\cos(x)\ln x}$
- ☐ $x^{\cos x} + x^{-\sin x}$

Riktig svar: c) $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$
Begrunnelse: Vi kan f.eks. bruke formelen for logaritmisk derivasjon $f'(x) = f(x)(\ln f(x))'$. Siden $\ln f(x) = \ln x^{\cos x} = \cos x \ln x$, får vi

$$f'(x) = x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \ln(x)\sin(x)\right)$$

En alternativ metode er å skrive $f(x) = x^{\cos x} = e^{\ln x \cos x}$ og så derivere på vanlig måte.

12. (3 poeng) Det *reelle* fjerdegradspolynomet $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ har i og $1 - i$ som røtter. $P(z)$ er lik:
☐ $z^4 + 5z^2 + 4$
☐ $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 2z + 5$
☐ $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$
☐ $z^4 - 5z^2 + 3z + 2$
☐ $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$

Riktig svar: e) $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$
Begrunnelse: Siden polynomet er reelt, må de konjugerte tallene $\bar{i} = -i$ og $\overline{1 - i} = 1 + i$ også være røtter. Dermed er

$$P(z) = (z - i)(z + 1)(z - (1 - i))(z - (1 + i)) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

13. (3 poeng) Grenseverdien $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$ er lik:
☐ 0
☐ $e^{-\frac{1}{2}}$
☐ ∞
☐ 1
☐ e^2

Riktig svar: b) $e^{-\frac{1}{2}}$
Begrunnelse: Vi skriver $\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln(\cos\frac{1}{x})}$ og regner først ut

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln(\cos\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot \left(-\sin(\frac{1}{x})\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(-2)x^{-3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{x}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{z} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Altså er $\lim_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln(\cos\frac{1}{x})} = e^{-\frac{1}{2}}$.

14. (3 poeng) Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{hvis } x \neq 0 \\ A & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$. For hvilken verdi av A er f kontinuerlig?

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ -1
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ Ingen verdi av A

Riktig svar: d) $\frac{1}{2}$
Begrunnelse: Siden

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

må vi ha $f(0) = \frac{1}{2}$ for å få kontinuitet.

15. (3 poeng) Når $x \to \infty$, har funksjonen $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ asymptoten:
- ☐ $y = x$
- ☐ Den har ingen asymptote
- ☐ $y = 2x + 1$
- ☐ $y = x + 1$
- ☐ $y = x + \frac{1}{2}$

Riktig svar: e) $y = x + \frac{1}{2}$
Begrunnelse: Vi bruker standardmetoden og observerer først at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+x^{-1}}}{x} = 1$$

Dette betyr at for en eventuell asymptote $y = ax + b$, er $a = 1$. For å finne b, regner vi ut

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \frac{1}{2}$$

(den siste grenseverdien regnet vi ut i oppgave 7). Altså er $y = x + \frac{1}{2}$ asymptote når $x \to \infty$.

16. (3 poeng) Funksjonen $f(x) = 1 - x^{\frac{4}{5}}$ er konveks på:
- ☐ Hele $\mathbb{R}$
- ☐ Ingen steder
- ☐ $(-\infty, 1)$
- ☐ Hvert av intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$
- ☐ $(-1, \infty)$

Riktig svar: d) Hvert av intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$
Begrunnelse: Vi har $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$ og $f'(x) = \frac{4}{25}x^{-\frac{6}{5}}$. Den andrederiverte er positiv for alle x unntatt $x = 0$ (der den ikke er definert). Dette gir at f er konveks på hvert av intervallene $(-\infty, 0]$ og $[0, \infty)$. Tegner du grafen,

vil du se at den ikke er konveks på hele $\mathbb{R}$ (den vokser oppover i en spiss i punktet $(0,1)$).

17. (3 poeng) Løsningene til annengradsligningen $z^2 + (1-i)z - i = 0$ er:
- ☐ $z = -i$ og $z = 1$
- ☐ $z = i$ og $z = -i$
- ☐ $z = 2i$ og $z = -1$
- ☐ $z = i$ og $z = -1$
- ☐ $z = \frac{i}{2}$ og $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Riktig svar: d) $z = i$ og $z = -1$
Begrunnelse: Ved annengradsformelen er løsningene gitt ved

$$z = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 4(-i)}}{2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{-(1-i) \pm (1+i)}{2}$$

som gir $z = i$ og $z = -1$.

18. (3 poeng) Du skal bruke definisjonen av kontinuitet til å vise at funksjonen gitt ved $f(x) = 6x + 3$ er kontinuerlig i $a = 2$. Gitt en vilkårlig $\epsilon > 0$, hvor liten må du velge δ for at $|f(x) - f(2)| < \epsilon$ når $|x - 2| < \delta$?
- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{2}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{1}{\epsilon}$
- ☐ Mindre enn $\min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{6}$
- ☐ Mindre enn $\frac{\epsilon}{4}$

Riktig svar: d) Mindre enn $\frac{\epsilon}{6}$
Begrunnelse: Setter vi $h = x - 2$, ser vi at

$$|f(x) - f(2)| = |f(2+h) - f(2)| = |6(2+h) + 3 - (6 \cdot 2) + 3| = 6|h|$$

For å være sikker på at dette er mindre enn ϵ når $h < \delta$, må vi velge $\delta \leq \frac{\epsilon}{6}$.

19. (3 poeng) En sylinderformet boks skal ha et volum på 16 dm^3. Du skal lage boksen slik at overflatearealet (sideflate+bunn+topp) blir minst mulig. Hvilken radius må du velge?
- ☐ $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm
- ☐ $r = \frac{\pi}{2}$ dm
- ☐ $r = \frac{3}{2}$ dm
- ☐ Vi kan få arealet så lite vi måtte ønske
- ☐ $r = \frac{5}{\pi}$ dm

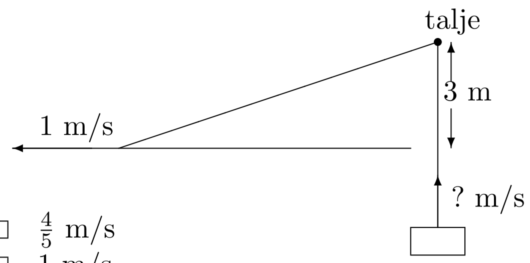
Riktig svar: a) $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm
Begrunnelse: Arealet et gitt ved $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Siden volumet er $V =$

$\pi r^2 h$, må vi ha $\pi r^2 h = 16$, som gir $h = \frac{16}{\pi r^2}$. Setter vi dette inn i uttrykket for arealet, får vi

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$

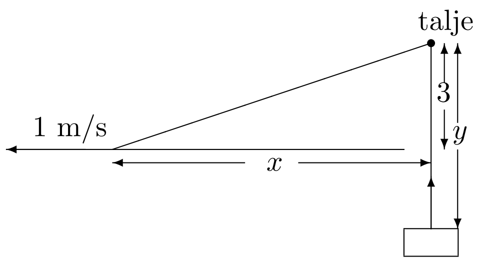
Vi deriverer og får $A'(r) = 4\pi r - \frac{32}{r^2}$. Setter vi dette lik 0 og løser for r, ser vi at $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm.

20. (3 poeng) En tung gjenstand skal heises opp fra en brønn. Et 10 meter langt tau er festet i gjenstanden, ført gjennom en talje som henger 3 meter over bakken og deretter ned på bakkenivå som vist på figuren. Den løse enden av tauet blir dratt vannrett bortover med en fart på 1 m/s. Hvor fort beveger gjenstanden seg oppover i det øyeblikket den henger 5 meter under taljen?



- ☐ $\frac{4}{5}$ m/s
- ☐ 1 m/s
- ☐ $\frac{1}{2}$ m/s
- ☐ $\frac{3}{4}$ m/s
- ☐ $\frac{6}{5}$ m/s

Riktig svar: a) $\frac{4}{5}$ m/s
Begrunnelse: På figuren nedenfor har vi ført på de to lengdene x og y som endrer seg.



Lengden av tauet er gitt ved $\sqrt{x^2 + 3^2} + y$, så vi må ha

$$\sqrt{x^2 + 9} + y = 10$$

gjennom hele bevegelsen. Deriverer vi mhp. tiden t, får vi

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} 2xx' + y' = 0$$

Dette gir

$$y' = -\frac{xx'}{\sqrt{x^2+9}}$$

I det øyeblikket vi ser på er

$$\sqrt{x^2+9} = 10 - y = 10 - 5 = 5$$

Dette medfører at $x = 4$, og dermed har vi

$$y' = -\frac{4 \cdot 1}{5}\mathrm{m/s}$$

Følgelig beveger gjenstanden seg oppover med en fart på $\frac{4}{5}$ m/s.