FORMELSAMLING FOR MAT 1100 OG MAT-INF 1100

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Anvendelser av integrasjon

Volum av omdreiningslegemer: om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$

om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$

Buelengde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$

Kjerneregelen: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$

Linearisering av F: $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Matrisen til en lineæravbildning T: $A = (\mathbf{T}(\mathbf{e}_1), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n))$

Differens- og differensialligninger

Annenordens differensligning $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$:

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n \cos(n\theta) + D\rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Annenordens differensialligning $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Numeriske formler

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$

$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Trapesmetoden: $\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$

$+ 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$

Simpsons formel: $\int_a^b f(x) \, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$

$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)$

Eulers metode: Førsteordens ligning: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$

Annenordens ligning:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + hDy_{n-1} \\ Dy_n = Dy_{n-1} + hg(x_{n-1}, y_{n-1}, Dy_{n-1}) \end{cases}$$