Eksamen i MAT 1100 — Janvar 2005

Kandidatnummer:

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktig!

DEL 1

1. (3 poeng) Integralet $\int \frac{x}{\sin^2(x^2)}\,dx$ er lik:

- ☐ $\frac{1}{2}\tan(x^2) + C$
- ☐ $\frac{1}{2}\arccos(x^2) + C$
- ☐ $-\frac{1}{2}\cot(x^2) + C$
- ☐ $-\frac{\frac{1}{2}x^2}{\cos^2(x^2)} + C$
- ☐ $-\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$

2. (3 poeng) Når vi skal løse integralet $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$ ved delbrøkoppspalting, setter vi integranden lik:

- ☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
- ☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
- ☐ må først polynomdividere
- ☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x+2)^2}$
- ☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x^2+2x+2}$

3. (3 poeng) Integralet $\int \arctan x\,dx$ er lik:

- ☐ $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
- ☐ $(x+1)\arctan x + C$
- ☐ $(x + \frac{x^2}{2})\arctan x + C$
- ☐ $x\arctan x - \frac{x^2}{2}\ln(1+x^2) + C$
- ☐ $-\ln|\cos x| + C$

4. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y,z) = z\arcsin(xy)$?

- ☐ $zx\arccos(xy)$
- ☐ $-\frac{xz}{\sin^2(xy)}$
- ☐ $\frac{xz}{1+x^2y^2}$
- ☐ $zx\tan(xy)$
- ☐ $\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

5. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y,z) = x^2z + yz$ raskest i punktet $(1,2,3)$?

☐ $(0,2,1)$
☐ $(3,1,2)$
☐ $(3,4,3)$
☐ $(6,3,3)$
☐ $(9,4,1)$

6. (3 poeng) Funksjonen $f(x,y) = xy + x - y$ har et stasjoært punkt i:

☐ $(1,4)$
☐ $(0,0)$
☐ $(0,1)$
☐ $(1,-1)$
☐ $(-\pi,1)$

7. (3 poeng) Funksjonen $f(x,y)$ har kontinuerlige annenderiverte. Vi vet at $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(1,0) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(1,0) = 4$. Da kan vi slutte at:

☐ $(1,0)$ er et lokalt minimum
☐ annenderivertesten gir ingen konklusjon
☐ $(1,0)$ er et sadelpunkt
☐ kan ikke si noe siden vi ikke kjenner $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)$
☐ $(1,0)$ er et lokalt maksimum

8. (3 poeng) Buelengden til funksjonen $f(x) = \arctan x$ fra $x = 0$ til $x = 1$ er lik:

☐ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^4+2x^2+2}}{1+x^2}\, dx$
☐ $\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{1 + \arctan^2 x}\, dx$
☐ $\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^4 x}}\, dx$

9. (3 poeng) Den deriverte til $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\arctan t}{t}\, dt$ er:

☐ $\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
☐ $\frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2}$
☐ $\frac{\arctan(x)}{x}$
☐ $\arctan(\sqrt{x})$
☐ $\frac{\arctan(\sqrt{x})}{2x}$

10. (3 poeng) $f(u,v) = uv^2$ er en funksjon av to variable. Dersom $g(x,y) = e^{xy^2}$ og $h(x,y) = x^2y^3$, hva er da $\frac{\partial k}{\partial y}$ der $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$?

☐ $2x^5y^7e^{xy^2}$
☐ $6x^4y^5e^{xy^2}$
☐ $2xye^{xy^2} + 3x^2y^2$
☐ $2x^5y^7e^{xy^2} + 6x^4y^5e^{xy^2}$
☐ $5xye^{x^2y^4} + 3x^4y^5e^{x^3y^6}$

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1:
a) (10 poeng) Vis at $1 + i\sqrt{3}$ er en rot i $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$. Hvilket annet tall kan du da uten regning si er rot i $P(z)$?

b) (10 poeng) Finn den reelle og komplekse faktoriseringen til $P(z) = z^4 + 4z^2 + 16$.

Oppgave 2:
a) Regn ut integralet

$$\int \frac{u+2}{u^2+2u+5}\,du$$

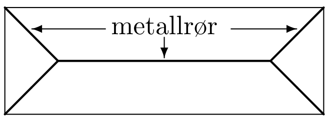
b) Finn konstanter A, B, C slik at

$$\frac{1}{u(u^2+2u+5)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+2u+5}$$

c) Regn ut integralet

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x + 2\cos x + 5}\,dx$$

Oppgave 3: (10 poeng) På figuren ser du undersiden av en rektangulær bordplate. Bordplaten er 3 meter lang og 1 meter bred. Den er forsterket av metallrør som går midt under bordet og ut til hvert hjørne slik du ser på figuren. Firmaet som produserer bordene, ønsker at den totale lengden til rørene skal være så liten som mulig. Hva er det minste denne lengden kan være?



Oppgave 4: (10 poeng) Vi ser på et reelt polynom

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

der graden n er et partall. Vis at $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ og at $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \infty$. Vis deretter at det finnes et tall K slik at $P(x) > K$ for alle $x \in \mathbf{R}$.

SLUTT