Løsningsforslag for 1. oblig MAT1100, høsten 2008

Oppgave 1

a) Vi har:

$$z = \frac{2-i}{3+i} = \frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{5-5i}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}}}.$$

b) Vi har:

$$z = 8(\cos\frac{3\pi}{4} + i\frac{\sin}{3\pi}4 = 8(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \underline{\underline{-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}}}.$$

c) Vi ser fra b) at $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$ har polarkoordinater $r = 8$ og $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Tredjerøttene til z er derfor gitt som $w_k = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Dette gir oss tredjerøttene:

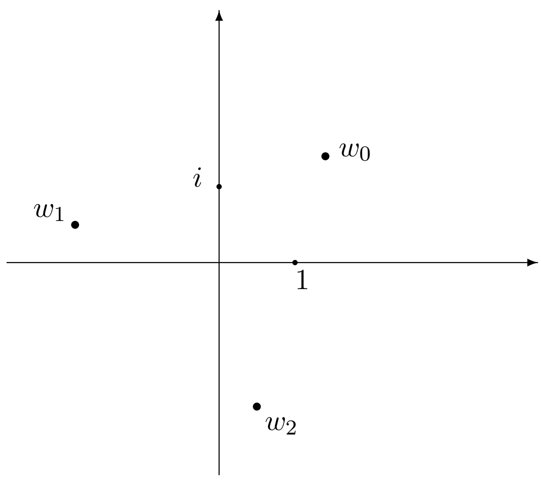
$$w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \underline{\underline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}.}}$$

$$w_1 = w_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) =$$

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}}}$$

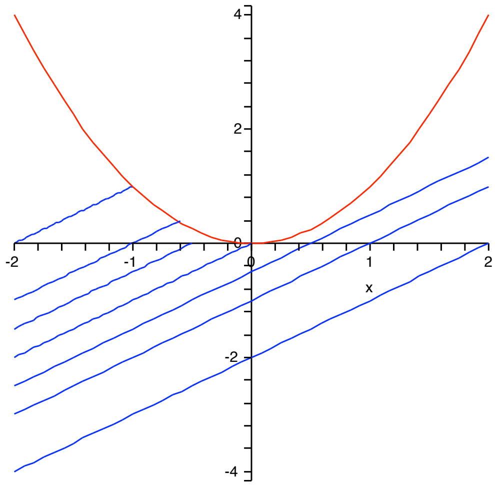
$$w_2 = w_1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = (\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3})$$

$$= \underline{\underline{\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}}}.$$



Oppgave 2

a) Sett $z = x + iy$. Da skal vi ha vi $\mathrm{Im}(z) = y < (\mathrm{Re}(z))^2 = x^2$, så området vi skal tegne er området i det komplekse planet som ligger under parabelen med likning $y = x^2$. Dette er området markert med blå streker på tegningen under.

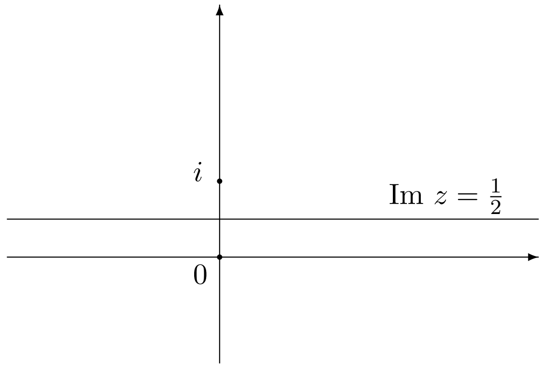


b) Setter vi $z = x + iy$ har vi $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z - i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Dette gir oss

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (y-1)^2 \\ x^2 + y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ 2y &= 1,\ \underline{\underline{y = \frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Dette svaret kan vi også komme frem til ved å resonnere geometrisk: Siden

$|z|$ er avstand mellom z og 0, og $|z-i|$ avstand mellom z og i, så er området vårt de z som ligger like langt fra 0 som fra i, dvs. linja $\underline{\underline{\operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2}}}$.



Oppgave 3

$p(1) = 1-2+4+2-5 = 0,\; p(-1) = 1-2(-1)+4+2(-1)-5 = 1+2+4-2-5 = 0.$

Dette viser at ± 1 er røtter i $p(z)$. Da må $p(z)$ være delelig med $(z-1)(z+1) = z^2-1$. Vi har:

$$\begin{array}{l}
\quad z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 2z - 5 \;:\; z^2 - 1 = z^2 - 2z + 5 \\
-\underline{(z^4 \qquad\quad - z^2)} \\
\qquad - 2z^3 + 5z^2 + 2z - 5 \\
\quad -\underline{(-2z^3 \qquad\quad + 2z)} \\
\qquad\qquad\qquad 5z^2 \qquad - 5 \\
\qquad\qquad -\underline{(5z^2 \qquad - 5)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Vi har videre:

$$z^2 - 2z + 5z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Så de komplekse røttene til $p(z)$ er ± 1 og $1 \pm 2i$. Kompleks faktorisering blir derfor:

$$\underline{\underline{p(z) = (z-1)(z+1)(z-(1+2i))(z-(1-2i))}},$$

og reell faktorisering blir:

$$\underline{\underline{p(z) = (z-1)(z+1)(z^2 - 2z + 5z)}}.$$

Oppgave 4

a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{2n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}$$

$$(\text{ siden } \frac{1}{n}\to 0 \text{ og } \frac{1}{n^2}\to 0 \text{ når } n\to\infty).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{n^2+3n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}{3}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

b) Siden $\frac{1}{1+a_n^2}>0$ for alle n og $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n^2}a_n$ er det klart at $a_{n+1}>0$ om $a_n>0$.
Siden $a_1=1>0$ følger da ved induksjon at $a_n>0$ for alle n.
(Om du ikke kan induksjonsbevis regner jeg med at stryker vi ordene "ved induksjon" i setningen over så vil du likevel oppfatte det som står igjen som et overbevisende resonement forat at $a_n>0$. Så du kan jo bare bruke en slik begrunnelse om du ikke har hørt om induksjonsbevis.)

Siden $a_n>0$ for alle n så er $1+a_n^2>1$ og derfor $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^2}<a_n$. a_n er derfor en monotont avtagende følge, nedtil begrenset av 0 (og selvfølgelig opptil begrenset av $a_1=1$) og fra en setning i boka (Teorem 4.3.9) følger det at denne følgen er konvergent. Det fins altså et tall a slik at $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.
Vi har da:

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}=\frac{a}{1+a^2}.$$

Så vi får:

$$a=\frac{a}{1+a^2}\Leftrightarrow a^3+a=a\Leftrightarrow a^3=0\Leftrightarrow \underline{\underline{a=0}}.$$