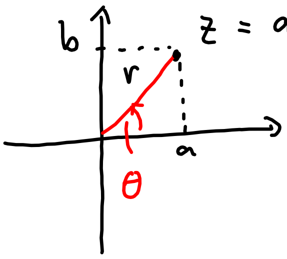
Komplekse fall



$z = a + ib = a + bi = re^{i\theta}$

$\mathbb{C}$ Vanlige regneregler, $i^2 = -1$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Divisjonstriks: $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} =$ etc.

$z = a + ib$ gir $\bar{z} = a - ib$

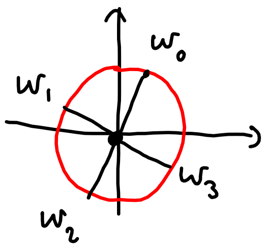
n-te røtter $z = re^{i\theta}$ der $\theta \in [0, 2\pi)$

Finne w slik at $w^n = z$

$$w_0 = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n}\left(e^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta/n)}$$

$$w_+ = e^{i(2\pi/n)}$$

$w_1 = w_+ w_0$ osv.



$n = 4$

Algebraens fundamentalteorem

$$P(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$$

har kompleks faktorisering

$$P(z) = c_n (z - r_1)\cdot(z - r_2)\cdots(z - r_n)$$

r_i : Røttene til polynomet P

Reell faktorisering for reelle polynomer $P(z)$ finnes ved å gange sammen faktorer som tilsvarer konjugerte røtter.

eks. $\underbrace{(z-i)(z+i)(z-1)}_{\text{kompleks faktorisering}} = (z^2 - iz + iz - i^2)(z-1)$

$$= \underbrace{(z^2+1)(z-1)}_{\text{reell faktorisering}}$$

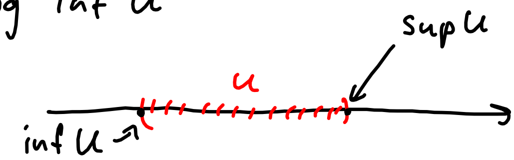
Røtter for polynomet: i, $-i$ og 1.

$\boxed{\text{Følger}}$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ uendelig liste av tall

Kompletthetsprinsippet for $\mathbb{R}$:

Hvis $U \subseteq \mathbb{R}$ er ikke-tom og begrenset, så fins $\sup U$ og $\inf U$



Følgen voksende og oppad begrenset $\Rightarrow$ Konv.

— " — avtakende og nedad — " — $\Rightarrow$ Konv.

Grensedefinisjon + triks for å finne hva en følge konverger mot: Analogt med

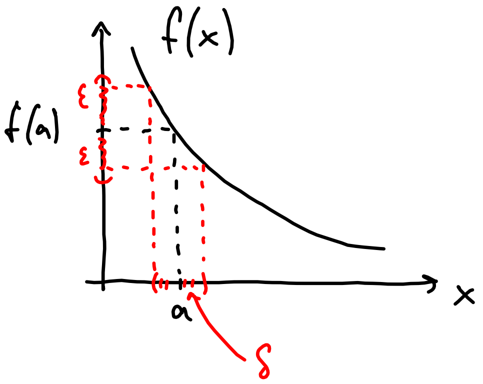
$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{for funksjoner } f.$$

$\boxed{\text{Kontinuitet (kap 5)}}$

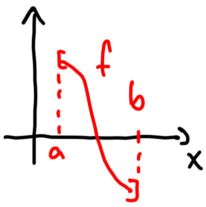
f kontinuerlig i a:

For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $x \in D_f$, så har vi

$$|x-a| < \delta \quad \text{medfører} \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$



Skjæringssetningen:



f kont på $[a,b]$

$\left.\begin{array}{l} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{array}\right\}$ eller omvendt

Da fins $x \in (a,b)$ slik at $f(x) = 0$

Ekstremalverdisetningen:

f kont på $[a,b]$ $\Rightarrow$ f har et (globalt) maks og et (globalt) min på $[a,b]$.

$\boxed{\text{Derivasjon (kap 6 og 7)}}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

eks. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \text{, dvs. f kontinuerlig}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \text{etc.}$$

$$= 0 \text{, dvs. f deriverbar.}$$

+ Derivasjonsregler.

Middelverditeoremet:

f kont på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b)

$\Rightarrow$ fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

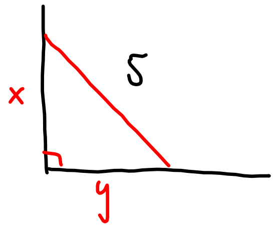
l'Hopitals regel

$\left[\frac{0}{0}\right]$ og $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: Deriver teller og nevner

Triks: $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\underbrace{[0^0], [1^\infty] \text{ og } [\infty^0]}$.

$a^b = e^{(\ln a)\cdot b}$ → regn videre

Koblede hastigheter



$$x^2 + y^2 = 5^2$$
$$2x \cdot x'(t) + 2y \cdot y'(t) = 0$$

etc.

Asymptoter, inkl. skrå

$$\left.\begin{aligned} a &= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right] \end{aligned}\right\} \text{ skråasymptote } y = ax + b$$

Annet:

Anvendelser av funksjonsdrøfting

Omvendte funksjon, inkl. arcus-funksjonene

Integrasjon (kap 8+9)

- Øvresummer, nedresummer, Riemannsummer
- Fundamentalteoremet :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

f kont.

- Volum av omdreiningslegemer om x-aksen og y-aksen:
  formler i formelsamling.

- Buelengde (formelsamling)

- Integrasjonsteknikker (antiderivasjon)
  Substitusjon
  Delvis integrasjon (inkl I-metoden)
  Delbrøksoppspalting

$$\frac{x}{(x+7)^2(x^2+10)^2} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{(x+7)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+10} + \frac{Ex+F}{(x^2+10)^2}$$

ikke regn ut!

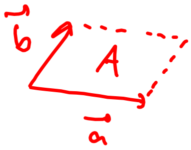
- Uegentlige integraler

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

Grensesammenlikningstesten, sammenlikningstesten

Kap 1 FLVA

- Skalarprodukt av n-tupler, n-tupler generelt
- Vektorprodukt
- Determinanter
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ er arealet av rektanglet utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$



- $\left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right|$ er volumet av parallellepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$

- Matriser: Multiplikasjon, inverse av matriser

Kap 2 FLVA

Partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}$

Gradienten ∇f

Retningsderivert $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

Vektorfunksjon: $\vec{F}(x,y) = (xy, 2y)$

Jacobimatrise