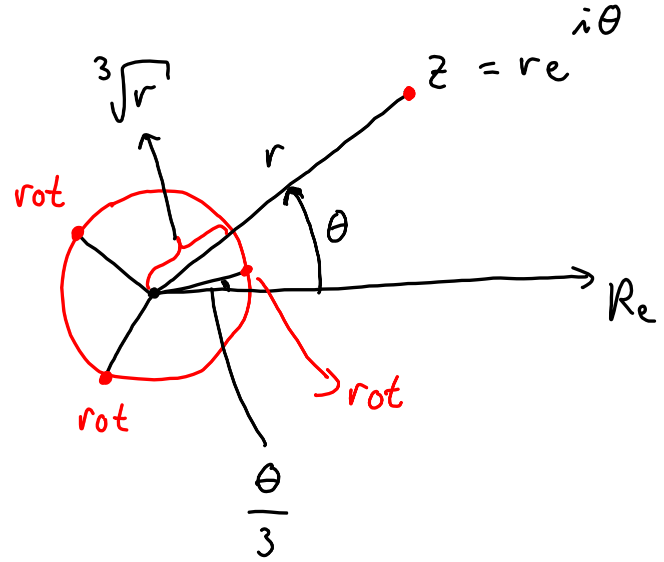
Kort repetisjon om n-te røtter av komplekse tall



Algebraens fundamentalteorem

La $P(z) = c_n z^n + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$

være et n-te grads polynom med komplekse koeffisienter c_i.
Da fins komplekse tall $r_1, \ldots, r_n$ slik at

$$P(z) = c_n (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

Tallene $r_1, \ldots, r_n$ kalles røttene til P. Bortsett fra rekkefølgen er de entydig bestemt. (Men noen kan være like.)

Altså:

Likningen $P(z) = 0$ har $z = r_1$, $z = r_2, \ldots, z = r_n$ som løsninger.

I tillegg:

(*) Hvis alle c_i-ene er reelle og z er en røttene, så er også $\bar{z}$ en av røttene. (Bevis: Se Kalkulus.)

(*) Formelen

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

for løsning av annengradslikninger $az^2 + bz + c = 0$ gjelder også for komplekse a, b og c, gitt at vi tolker $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ som de to kvadratrøttene til $(b^2 - 4ac)$.
(Samme bevis som før.)

Eks. 1

a) Vis at $z = i$ er en rot i polynomet

$$P(z) = z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i$$

b) Finn de andre røttene til P

c) Finn kompleks faktorisering av P.

Løsning

a) $$P(i) = i^3 + (-2-i)i^2 + (5+2i)i - 5i$$

$$= i^3 \underline{-2i^2} - i^3 + \cancel{5i} + \underline{2i^2} - \cancel{5i} = \underline{\underline{0}}$$

b) Vi bruker kompleks versjon av polynomdivisjon:

$$\left(z^3 + (-2-i)z^2 + (5+2i)z - 5i\right) : (z - i) = z^2 - 2z + 5$$

$$\begin{array}{l} \underline{z^3 - iz^2} \\ \quad -2z^2 + (5+2i)z - 5i \\ \quad \underline{-2z^2 + 2iz} \\ \qquad\quad 5z - 5i \\ \qquad\quad \underline{5z - 5i} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Ergo: $P(z) = (z-i)\cdot(z^2 - 2z + 5)$

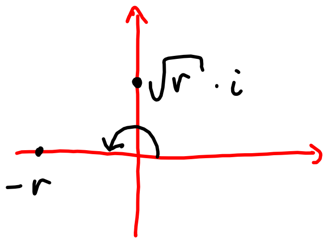
$z^2 - 2z + 5 = 0$ gir $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2}$

dvs. $z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-1)\cdot 16}}{2}$ (se neste side)

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm i\cdot 4}{2} = \begin{cases} 1 + 2i \\ 1 - 2i \end{cases}$$

Konklusjon: De øvrige røttene er $z = \underline{\underline{1+2i}}$ og $z = \underline{\underline{1-2i}}$

Digresjon Hvis $r > 0$ er et reelt tall, så er



$$\boxed{\sqrt{-r} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{r} = \sqrt{r} \cdot i}$$

Vi har $-r = re^{i\pi}$

Men: (Advarsel) Regelen $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ holder ikke for alle komplekse tall z og w. Se her, nemlig:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \underset{\uparrow \text{ ulovlig}}{=} \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$$

c) Kompleks faktorisering:

$$P(z) = 1 \cdot (z - i) \cdot (z - (1+2i)) \cdot (z - (1-2i))$$

$$= \underline{\underline{(z - i) \cdot (z - (1+2i)) \cdot (z - (1-2i))}}$$

Eks. 2

Lage oppgave

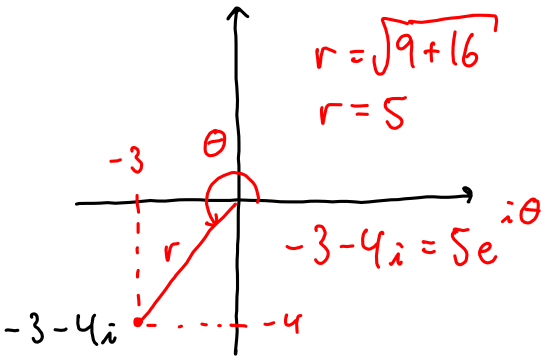
$$(z-i)\cdot(z-(1-i)) = z^2 - iz - z(1-i) + i(1-i)$$
$$= z^2 - \cancel{iz} - z + \cancel{iz} + i + 1$$
$$= z^2 - z + i + 1$$

Vår oppgave: Finn røttene til $P(z) = z^2 - z + i + 1$.

Løsn. $P(z) = 0$ gir $z^2 - z + (i+1) = 0$

dvs. $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(i+1)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4i-4}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$



Mja, vi må jo ha

$$\frac{1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2} = i$$

Dette gir $1 \pm \sqrt{-3-4i} = 2i$

$\pm\sqrt{-3-4i} = -1 + 2i$

Tester: $(-1+2i)(-1+2i) = 1 - 2i - 2i - 4 = \underline{-3-4i}$

Altså: $\sqrt{-3-4i} = -1+2i$. Dvs:

$$z = \frac{1 \pm (-1+2i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1-1+2i}{2} = \underline{\underline{i}} \\[2ex] \dfrac{1-(-1)-2i}{2} = \underline{\underline{1-i}} \end{cases}$$

Nytt eksempel

a) Finn kompleks faktorisering av polynomet

$$P(z) = (z^4+1)(i-z)$$

b) Finn reell faktorisering av polynomet z^4+1.

Kommentar

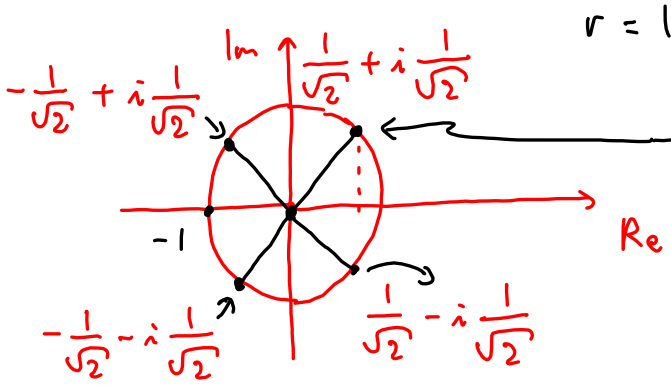
Oppgaven kunne sagt $P(z) = (z^4+1)i - z(z^4+1)$ (verre?)

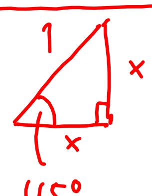
$$= iz^4 + i - z^5 - z$$ (enda verre...)

Løsning

a) $z^4 + 1 = 0$ gir $z^4 = -1$

Fjerderøtter av -1 : $-1 = re^{i\theta}$ gir $r = 1$ og $\theta = \pi$





$$x^2 + x^2 = 1^2$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kompleks faktorisering :

$$P(z) = (-1)(z-i)(z^4+1)$$

$$= (-1)(z-i)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Reell faktorisering av z^4+1 :

Ganger sammen faktorer svarende til konjugerte røtter :

$$\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Egentlig :

$$\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cdot\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= z^2+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}z}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{2}+\cancel{i\cdot\frac{1}{2}}$$

$$\cancel{-i\frac{1}{\sqrt{2}}z}\cancel{-i\frac{1}{2}}+\frac{1}{2} = z^2+\frac{2}{\sqrt{2}}z+1$$

$$= z^2+\frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot z+1 = z^2+\sqrt{2}z+1$$

$$\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(z-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= z^2-\frac{1}{\sqrt{2}}z+\cancel{i\frac{1}{\sqrt{2}}z}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{2}\cancel{-i\frac{1}{2}}$$

$$\cancel{-i\frac{1}{\sqrt{2}}z}+\cancel{i\frac{1}{2}}+\frac{1}{2} = z^2-\sqrt{2}z+1$$

Reell faktorisering av polynomet z^4+1 :

$$z^4+1 = \underline{\underline{\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\cdot\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)}}$$