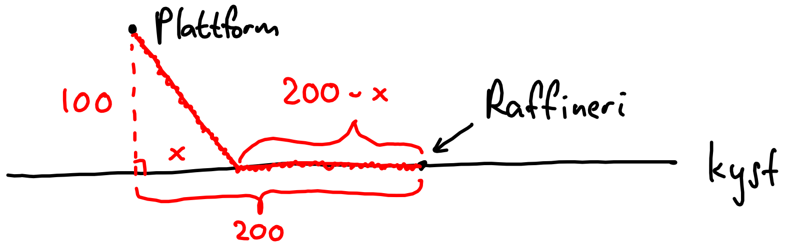
# Anvendelser av funksjonsdrøfting (7.1)

**eks.** En oljeplattform ligger i avstand 100 km fra rettlinjet kyst. Vi skal legge ny rørledning til et raffineri som ligger 200 km fra nærmeste punkt på land.




Det koster $c_1$ kr/km å legge rør på havbunnen og $c_2$ kr/km på land, der $c_1 > c_2$.

Hvilken x gir lavest pris?

**Løsn.** La $P(x)$ være prisen som funksjon av $x$.

Da får vi

$$P(x) = c_1 \cdot (\text{lengde i vann}) + c_2 \cdot (\text{lengde på land})$$
$$= c_1 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2} + c_2 \cdot (200 - x)$$

Vi vil finne globalt minimum for $P(x)$ på def. området $x \in [0, 200]$.

Kandidater er da de kritiske punktene for $P(x)$, dvs.

(i) punkter der $P'(x) = 0$

(ii) punkter der $P'(x)$ ikke fins

(iii) endepunktene $x = 0$ og $x = 200$.

Vi får

$$p'(x) = c_1 \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(x^2 + 100^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x + c_2\,(0 - 1)$$

$$= \frac{c_1 x}{\sqrt{x^2 + 100^2}} - c_2$$

$p'(x)$ fins for alle $x \in [0, 200]$, så ingen kritiske punkter av type (ii).

$$p'(x) = 0 \text{ gir } \frac{c_1 x}{\sqrt{x^2 + 100^2}} = c_2$$

$$c_1 x = c_2 \cdot \sqrt{x^2 + 100^2}$$

$$c_1^2 x^2 = c_2^2 \cdot \left(x^2 + 100^2\right)$$

$$c_1^2 x^2 = c_2^2 x^2 + c_2^2 \cdot 100^2$$

$$c_1^2 x^2 - c_2^2 x^2 = c_2^2 \cdot 100^2$$

$$\left(c_1^2 - c_2^2\right) x^2 = c_2^2 \cdot 100^2$$

$$x^2 = \frac{c_2^2 \cdot 100^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

$p'' > 0$

$p'' < 0$

$$\text{Så } x = \sqrt{\frac{c_2^2 \cdot 100^2}{c_1^2 - c_2^2}} = \frac{\sqrt{c_2^2 \cdot 100^2}}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = \frac{100\, c_2}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}$$

Sjekker den andrederiverte:

$$P''(x) = \frac{c_1\sqrt{x^2+100^2} - c_1 x \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}(x^2+100^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x}{x^2+100^2}$$

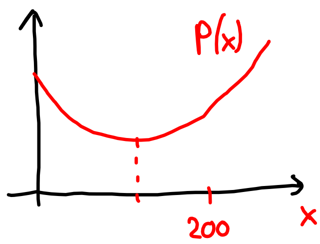
$$= \frac{c_1 \cdot (\cancel{x^2}+100^2) - c_1\cancel{x^2}}{(x^2+100^2)^{3/2}} = \frac{c_1 \cdot 100^2}{(x^2+100^2)^{3/2}} > 0$$

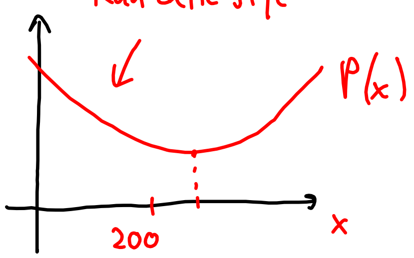
Ergo er

$$x = \frac{100\,c_2}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}}$$

et lokalt minimum. Men vi må sjekke en ting til:
Er dette tallet større enn 200?

Kan dette skje?




Konklusjon: Velg $x$ som det minste tallet av $\frac{100\,c_2}{\sqrt{c_1^2-c_2^2}}$ og 200.

Sjekk av om $P'(x) = 0$ kan gi $x > 200$ :

$$x = \frac{100c_2}{\sqrt{c_1^2 - c_2^2}} = \frac{100c_2}{\sqrt{c_2^2\left(\frac{c_1^2}{c_2^2} - 1\right)}} = \frac{100\cancel{c_2}}{\cancel{c_2}\cdot\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1}} > 200$$

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$$

gir $\sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1} < \frac{1}{2}$ dvs. $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1 < \frac{1}{4}$

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$\frac{c_1}{c_2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

dvs. $c_1 < \frac{\sqrt{5}}{2}c_2$

Så punktet der $P'(x) = 0$, er større enn 200 hvis

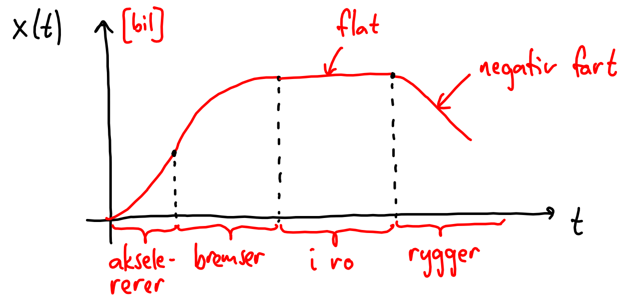
$$c_2 < c_1 < \frac{\sqrt{5}}{2}c_2$$

# Koblede hastigheter (7.2)

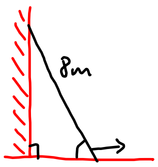
Generelt: $x(t)$ : posisjon / strekning

$x'(t)$ : hastighet

$x''(t)$ : akselerasjon



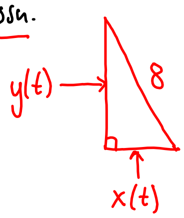

eks. En 8 m lang stige sklir ned en vegg.




Når vinkelen mellom stigen og bakken er 30°, beveger nedre del av stigen seg med fart 3 m/s i forhold til bakken.

Hvor fort sklir toppen av stigen nedover veggen akkurat da?

Løsn.

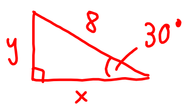



Pytagoras: $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 8^2$

Deriverer begge sider med hensyn på $t$:

$$2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0 \quad (*)$$

Må finne $x$ og $y$ når vinkelen er 30°:




$y = 4$

$x^2 + y^2 = 8^2$

$x^2 + 16 = 64, \quad x^2 = 48, \quad x = \sqrt{48}$

(*) med $x(t) = \sqrt{48}$, $y(t) = 4$ og $x'(t) = 3$ blir

$$\cancel{2} \cdot \sqrt{48} \cdot 3 + \cancel{2} \cdot 4 \cdot y'(t) = 0$$

$$y'(t) = -\frac{3\sqrt{48}}{4} \quad (m/s)$$

$$\boxed{\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}}$$

Stigen sklir nedover med fart $3\sqrt{3}$ (m/s)