

Løsningsforslag oblig 1 mand. 10 okt.

Midtveis eksamen fredag 14. okt. kl. 13-15

Løsningsforslag midtveis samme eftermiddag

Tekna lørd. 10.30-15.30 Aud 2 VB

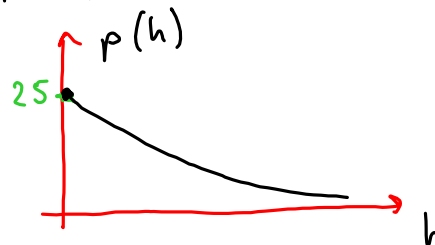
Snuble ons. op. 15-10 VB

Orakeltjeneste tors. kl. 10-16, VB (aud 5?)

Omvendte funksjoner (7.4) (Inverse funksjoner)

eks. På planeten Solaris er trykket p som funksjon av høyden h over havet gitt ved

$$p(h) = \frac{100}{4+h}$$



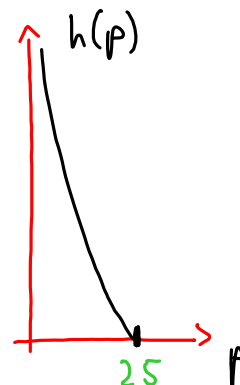
Høyden h som funksjon av trykket p er da gitt ved

$$p \cdot (4+h) = 100$$

$$4p + ph = 100$$

$$ph = 100 - 4p$$

$$h(p) = \frac{100 - 4p}{p} = \frac{100}{p} - 4$$



Dette svarer til at funksjonene

$$f(x) = \frac{100}{4+x} \quad D_f = [0, \infty) \quad V_f = (0, 25]$$

$$\text{og} \quad g(x) = \frac{100}{x} - 4 \quad D_g = (0, 25] \quad V_g = [0, \infty)$$

er omvendte av hverandre. Vi har

$$g(f(x)) = \frac{100}{f(x)} - 4 = \frac{100}{\left(\frac{100}{4+x}\right)} - 4$$

$$= \frac{100 \cdot (4+x)}{100} - 4 = \frac{400 + 100x}{100} - 4 = \underline{\underline{x}}$$

Tilsvarende får $f(g(x)) = x$. \square

Definisjon: Omvendte funksjoner

Funksjonene f og g kalles omvendte av hverandre hvis

$$g(f(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_f \quad D_g = V_f$$

$$f(g(x)) = x \quad \text{for alle } x \in D_g \quad V_g = D_f$$

Vi skriver $g(x) = f^{-1}(x)$ og $f(x) = g^{-1}(x)$.

Grafene blir speilbilder om diagonalen $y = x$. For at f^{-1} skal finnes, må det til hver $b \in V_f$ være kun en $a \in D_f$ slik at $f(a) = b$. Funksjonen f kalles da injektiv eller en-entydig.

Teorem (7.4.5 og 7.4.6)

Hvis D_f er et intervall og f er kontinuertlig og strengt monoton (strengt voksende eller strengt avtakende), så gjelder

- (i) Den omvendte funksjonen f^{-1} er også kontinuertlig
- (ii) Hvis f er deriverbar i x og $f'(x) \neq 0$, så er f^{-1} deriverbar i punktet $f(x)$, og

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bevis Se bok. Vi nøyer oss med et "fysikerbevis" for (ii): Vi har $f^{-1}(f(x)) = x$.

Vi deriverer begge sider, og bruker kjerneregelen:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

dvs. $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ hvis $f'(x) \neq 0$ \square

eks. Anta at f og g er omvendte funksjoner, og at

$$f(1) = 8, \quad g'(8) = 4$$

Finn $f'(1)$.

Løsn. Vi har

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

[tok $x=1$
Da er
 $f(x) = 8$]

$$(f^{-1})'(8) = \frac{1}{f'(1)}$$

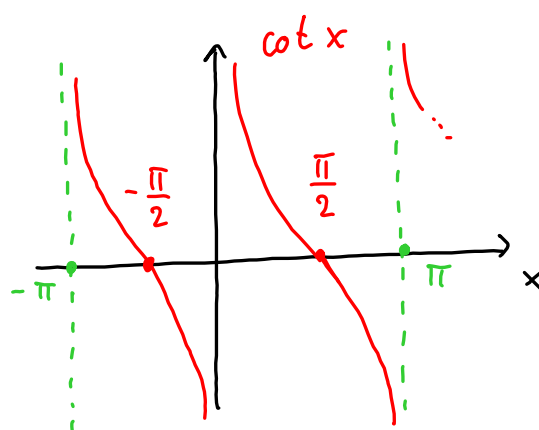
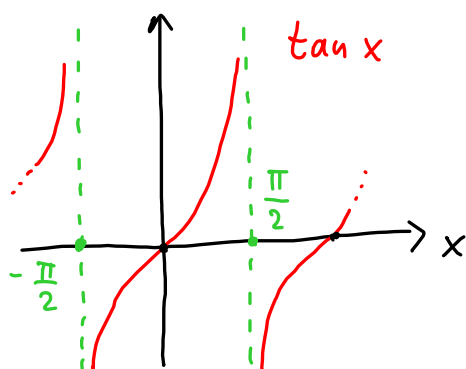
$$g'(8) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$4 = \frac{1}{f'(1)}, \quad \text{dvs. } f'(1) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Tangens og cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

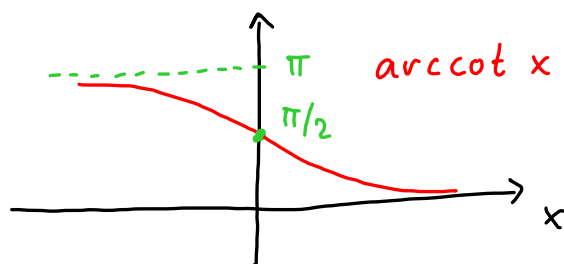
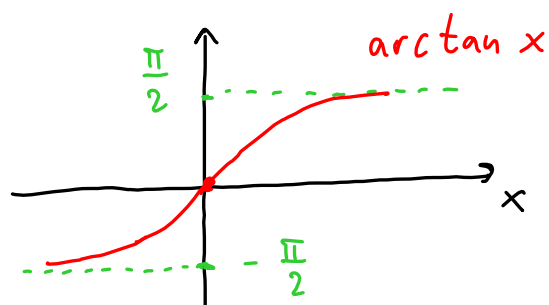
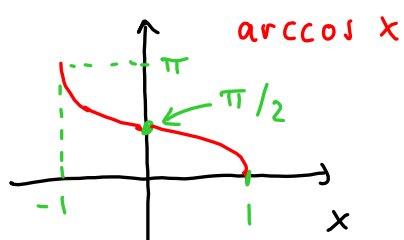
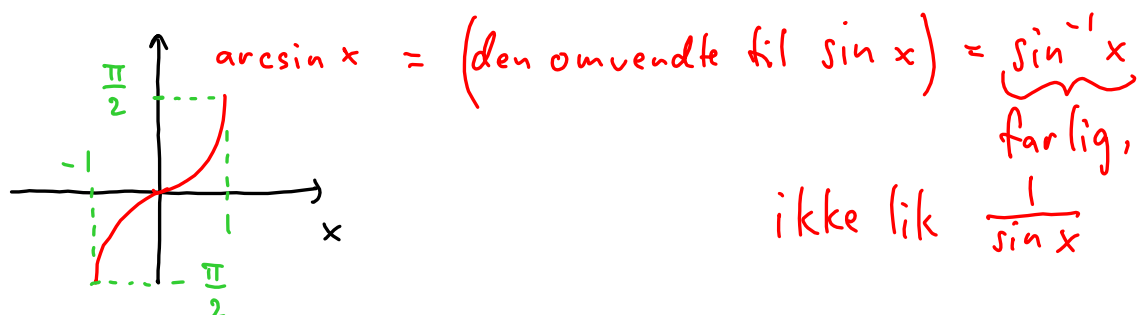


$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Arcusfunksjonene (7.6)

Vi velger områder der de trigonometriske funksjonene er en-etydige, og definerer omvendte funksjoner til dem der.



Deriverte av arcusfunksjonene

Bruker $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Vi ser på $\sin^{-1} x$. Formelen gir, med $f(x) = \sin x$:

$$(\sin^{-1})'(\sin x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Fordi $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, og
 $\cos x \geq 0$ for $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Innsetting av x for $\sin x$ gir $(\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tilsvarende for de andre. Oversikt:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$