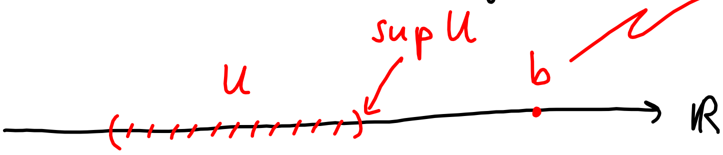
## Bagrunnsstoff fra kapittel 2

Mengden av alle reelle tall: $\mathbb{R}$

La $U \subseteq \mathbb{R}$ være en delmengde

øvre begrensning for $U$.




Med en <u>øvre begrensning</u> for $U$ menes et reelt tall $b$ slik at alle $a \in U$ oppfyller $a \leq b$. Hvis $U$ har en øvre begrensning, kalles den <u>oppad begrenset</u>.

Med $\sup U$ (supremum til $U$) menes den minste øvre begrensningen til $U$, hvis en slik fins.

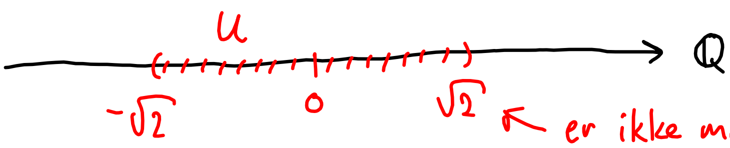
### Kompletthetsprinsippet (2.3.2)

Hvis $U \subseteq \mathbb{R}$ er ikke-tom og oppad begrenset, så fins $\sup U$.

Dette prinsippet holder ikke hvis vi kun jobber med <u>rasjonale tall</u>.

Moteksempel:

La $U$ være mengden av alle $x$ slik at $x^2 < 2$.

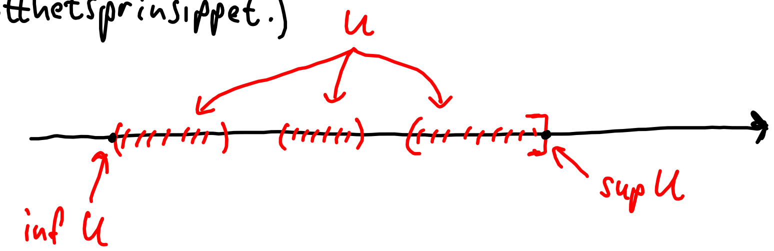



er ikke med, for den er ikke et rasjonalt tall

Så $\sup U$ fins ikke når vi kun regner med rasjonale tall.

Tilsvarende:
- Begrepet nedad begrenset
- inf $U$ (infimum) = største nedre begrensning til mengden $U$

Hvis $U$ er ikke-tom og nedad begrenset, så fins inf $U$.
(Kompletthetsprinsippet.)



## Konvergens av følger (4.3)

En følge er en uendelig liste av reelle tall

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

eks.

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \ldots\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

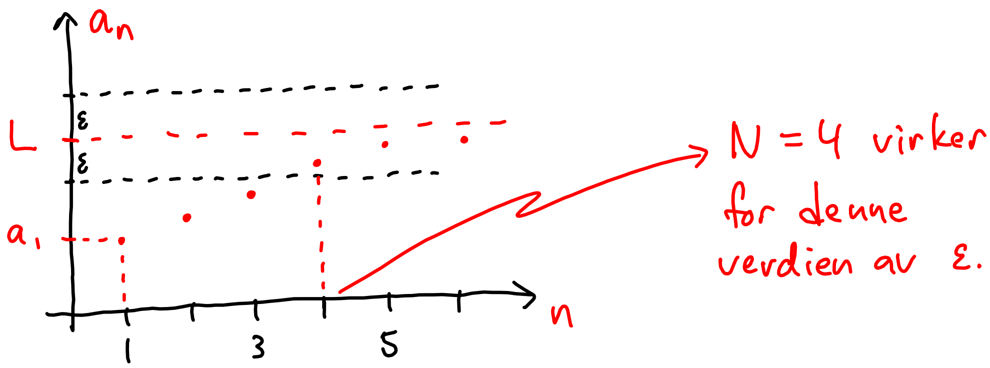
En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sies å konvergere mot tallet $L$, og vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins en $N$ slik at

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \geq N.$$

Figur:

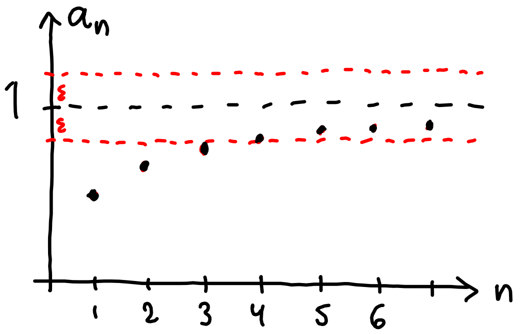


eks. Skal bevise fra definisjonen at følgen

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konvergerer mot 1. Dvs. vi skal vise at $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Løsn. Tegner figur:




Gitt ε, hvor stor må N velges?
(N = 4 holder for denne ε-en)

Metode: Vi ser på avstanden mellom $a_n = \frac{n}{n+1}$ og 1:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{(\cancel{n}+1) - \cancel{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Gitt toleranse $\varepsilon > 0$, skal vi altså oppnå at

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{dvs.} \quad 1 < \varepsilon \cdot (n+1)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Vi kan altså velge et helt tall $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Ergo konvergerer følgen mot 1. $\square$

Hvis oppgaven ikke krever at du skal bruke definisjonen for å finne ut hva en følge konvergerer mot: Regn "vanlig".

Se teorem 4.3.3 i læreboken. Her kommer to triks.

**Trix 1: Dele på dominerende ledd**

* Kan brukes bl.a. hvis du har en grense på formen $\frac{\infty}{\infty}$, dvs. en brøk der teller og nevner går mot uendelig.

eks. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 6^n}{3\cdot 6^n + e^n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{-2}{6}\right)^n}^{\to 0} + 1}{3 + \underbrace{\left(\frac{e}{6}\right)^n}_{\to 0}}$$

Deler på dominerende ledd $6^n$ oppe og nede

$$= \frac{1}{3}$$

(brukte reglene i teorem 4.3.3)

Trix 2 : Gange med det "konjugerte uttrykket" oppe og nede

* Kan bl.a. prøves hvis grensen er på formen $[\infty - \infty]$

eks. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{k^2n^2+n} - kn\right)$ der $k>0$ (på formen $[\infty-\infty]$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{k^2n^2+n} - kn}{1}$$

trix

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{k^2n^2+n} - kn\right)\cdot\left(\sqrt{k^2n^2+n} + kn\right)}{1\cdot\left(\sqrt{k^2n^2+n} + kn\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cancel{k^2n^2}+n\right) - \cancel{k^2n^2}}{\sqrt{k^2n^2+n} + kn}$$

(kryssleddene falt bort, jf. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{k^2n^2+n} + kn}$$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{k^2n^2+n}}{n} + k}$$

(delte på n oppe og nede)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2n^2+n}{n^2}} + k}$$

(fordi vi har $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+\frac{1}{n}} + k}$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^2}+k} = \frac{1}{k+k} = \underline{\underline{\frac{1}{2k}}}$$

# Voksende og avtakende følger

En følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kalles

- voksende hvis $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$
- avtakende hvis $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$
- oppad begrenset hvis det fins $M$ slik at $a_n \le M$ for alle $n$
- nedad begrenset hvis —— " —— $a_n \ge M$ — " —

## Kompletthetsegenskapen for følger (4.3.9)

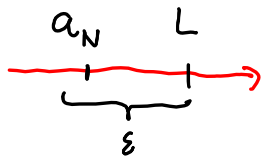
(i) Hvis en følge er voksende og oppad begrenset, så konvergerer den.

(ii) —— " —— avtakende og nedad —— " ——

**Bevis** (i) Hvis $\{a_n\}$ er voksende og oppad begrenset, så fins

$$L = \sup \{ a_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots \}$$

ved kompletthetsprinsippet. Gitt $\varepsilon > 0$ fins da $N \ge 1$ slik at




$$|a_N - L| < \varepsilon$$

Men siden følgen er voksende, får vi da at

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{for alle } n \ge N.$$

Altså har vi bevist at $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. $\square$

## Eksempel på oppgave

Betrakt følgen gitt ved $a_1 = 0$ og

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}(a_n + 2)} \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

a) Vis at følgen er oppad begrenset av 1.

b) Vis at følgen er voksende

c) Vis at følgen konvergerer, og finn ut hva den konvergerer mot.

## Løsning

a) $a_1 = 0$

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{3}(a_1+2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(0+2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{1}{3}(a_2+2)} = \text{etc.}$$

Vi har $a_1 < 1$. Hvis vi antar at

$$a_n < 1$$

får vi:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}(a_n+2)} < \sqrt{\frac{1}{3}(1+2)} = \sqrt{1} = 1$$

Altså $a_{n+1} < 1$ også. Dermed har vi bevist ved induksjon at $a_n < 1$ for alle $n$. Altså er følgen oppad begrenset av 1.

b) Vi får:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}(a_n+2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(a_n+1+1)}$$

$$> \sqrt{\frac{1}{3}(a_n+a_n+a_n)} = \sqrt{\frac{\cancel{3}a_n}{\cancel{3}}}$$

$$= \sqrt{a_n} > a_n$$

Siste ulikhet: Fordi $\sqrt{x} > x$ når $x < 1$, og vi vet at $a_n < 1$.

Ergo er følgen voksende.

c) Vi får nå fra kompletthetsegenskapen for følger at følgen vår konvergerer. Den er nemlig voksende og oppad begrenset.

Trix for å finne ut hva følgen konvergerer mot:
La $n \to \infty$ på begge sider i rekursjonsformelen.

$$\lim_{n\to\infty} \overset{\to L}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{3}(\underset{\downarrow L}{a_n}+2)}$$

Vi kaller grensen følgen konvergerer mot, for L

Da får vi

$$L = \sqrt{\frac{1}{3}(L+2)}$$

$$L^2 = \frac{1}{3}(L+2)$$

$$L^2 - \frac{1}{3}L - \frac{2}{3} = 0$$

$$L = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3}}}{2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \pm \frac{5}{3}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{6} \end{cases}$$

$L = -\frac{4}{6}$ er umulig fordi $a_1 = 0$ og følgen er voksende. Ergo $L = 1$, dvs. følgen konvergerer mot 1. $\square$