Integrasjonsteori

Partisjon av $[a, b]$: Oppdeling

$$\Pi = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

der

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$$

La $f(x)$ være begrenset på $[a, b]$

$$\Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{øvre trappesum}$$

der $M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{nedre trappesum}$$

der $m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

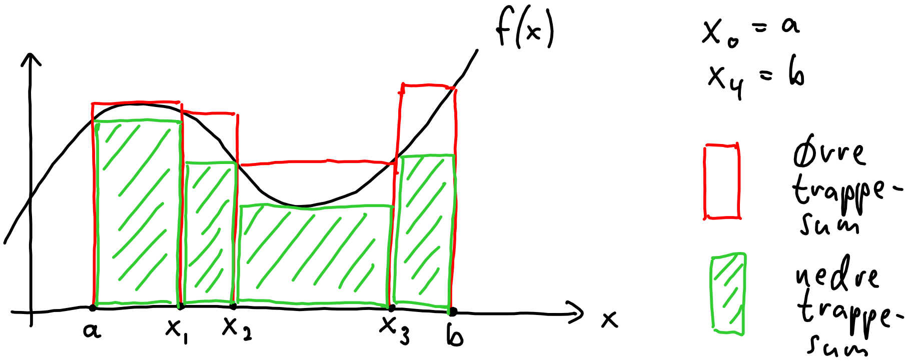
Øvreintegralet av f på $[a, b]$:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \inf \{ \Phi(\Pi) \mid \Pi \text{ er en partisjon av } [a,b] \}$$

Nedreintegralet av f på $[a, b]$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sup \{ N(\Pi) \mid \Pi \text{ er en partisjon av } [a,b] \}$$

Figur : Her er $n = 4$.



Definisjon La f være begrenset på $[a,b]$. Vi sier at f er **integrerbar** på $[a,b]$ hvis øvreintegralet av f er lik nedreintegralet av f på $[a,b]$. I så fall definerer vi **integralet** av f på $[a,b]$ til å være den felles verdien. Integralet skrives

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Tilleggsdefinisjoner:

$$\overline{\int_a^a} f(x)\,dx = \underline{\int_a^a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{og}$$

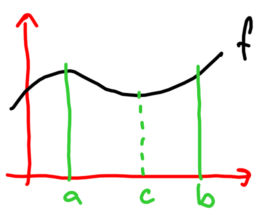
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = -\overline{\int_b^a} f(x)\,dx \quad \text{for } b < a \qquad \left(\begin{array}{c}\text{nedreint.}\\ \text{tilsvarende}\end{array}\right)$$

Setning 8.3.1

Anta at $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset og at $c \in (a,b)$.

Da er

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$



Tilsvarende for nedreintegraler.

Bevis Se bok.

En funksjon F kalles en antiderivert til f på $[a,b]$ hvis

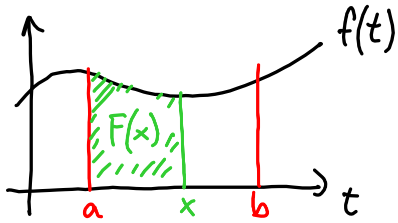
$$F'(x) = f(x)$$

for alle $x \in (a,b)$ og F er kontinuerlig i endepunktene a og b.

Analysens fundamentalteorem (8.3.3)

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$ der $a \leq x \leq b$, og funksjonen

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

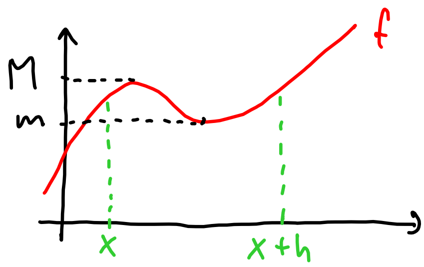


er en antiderivert til f på $[a,b]$.

Bevis Siden f er kontinuerlig på $[a,b]$, er det begrenset der. Derfor kan vi definere

$$G(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt \quad \text{for } x \in [a,b].$$

La $x \in (a,b)$ og la $h > 0$ være så liten at $x+h < b$. La M og m være henholdsvis sup og inf for $f(t)$ på intervallet $[x, x+h]$.



Vi har

$$G(x+h) - G(x) = \overline{\int_a^{x+h}} f(t)\,dt - \overline{\int_a^{x}} f(t)\,dt \underset{\boxed{8.3.1}}{=} \overline{\int_x^{x+h}} f(t)\,dt$$

Vi har også

$$m \cdot h \leq \overline{\int_x^{x+h}} f(t)\,dt \leq M \cdot h$$

dvs.

$$m \cdot h \leq G(x+h) - G(x) \leq M \cdot h$$

$$m \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq M$$

Når $h \to 0$, må $m \to f(x)$ og $M \to f(x)$ ved kontinuitet av f. Altså

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Tilsvarende vises dette når $h \to 0^-$. Har da $G'(x) = f(x)$ for $x \in (a, b)$. Tilsvarende vises at

$$H(x) = \underline{\int_a^{x}} f(t)\,dt$$

også oppfyller $H'(x) = f(x)$ for $x \in (a, b)$. At G og H er kontinuerlige i a og b, er tema for oppgave 8.3.17. Men da fins C slik at $G(x) = H(x) + C$ på $[a, b]$. (Middelverdisetningen, lemma 8.3.2).

Men $G(a) = H(a) = 0$, så $C = 0$.

Ergo $G(x) = H(x)$ for alle $x \in [a, b]$. Så f er integrerbarbar på ethvert intervall $[a, x]$, og vi har at

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = H(x) = G(x) \quad \text{for alle } x \in [a, b]. \ \square$$