$\boxed{\text{Funksjoner av flere variable (2.1)}}$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kalles for

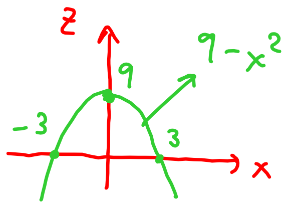
- et skalarfelt hvis $m = 1$
- en vektorvaluert funksjon hvis $m > 1$

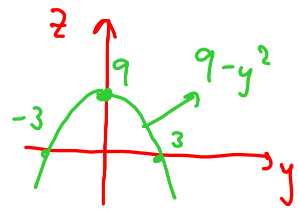
eks. 1 $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved $f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2)$

(skalarfelt, to variable)

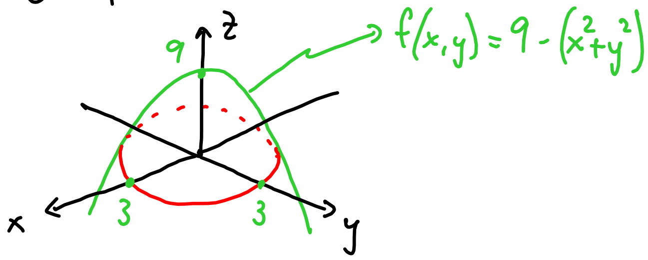
Merk at $f(x,0) = 9 - x^2$

$f(0,y) = 9 - y^2$

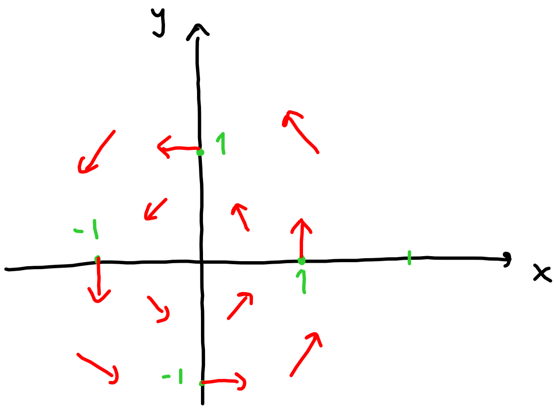




Grafen:



eks. 2 $F(x,y) = \left(-\frac{y}{3}, \frac{x}{3}\right)$



(Virvelbevegelse rundt origo)

Her: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
(vektorvaluert funksjon, også kalt vektorfelt)

$F(1,0) = \left(-\frac{0}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$

$F(0,1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{0}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

$F(-1,0) = \left(0, -\frac{1}{3}\right)$

$F(0,-1) = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

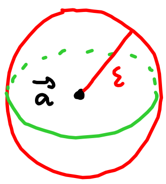
Kontinuitet (2.2)

Avstand mellom punktene $\vec{x}$ og $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^n$:

$$|\vec{x}-\vec{a}| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$$

= lengden av vektoren fra $\vec{a}$ til $\vec{x}$.

$B(\vec{a},\varepsilon)$: Mengden av punkter i $\mathbb{R}^n$ med avstand mindre enn ε til $\vec{a}$.



Kule med sentrum $\vec{a}$ og radius ε.

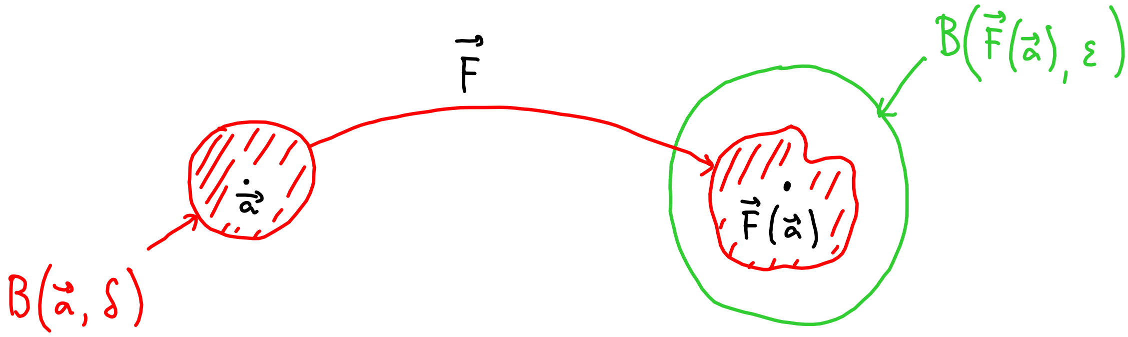
Definisjon (kontinuitet)

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\vec{a} \in A$. En funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ kalles kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon \text{ for alle } x \in A \text{ slik at } |\vec{x}-\vec{a}| < \delta$$

Figur:

$$A \xrightarrow{\vec{F}} \mathbb{R}^m$$



Teorem (2.2.2)

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^n$, og at $F, G : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\vec{a} \in A$. Da er $F+G$, $F-G$, $F \cdot G$ og F/G være kontinuerlige i $\vec{a}$, det siste forutsatt at $m=1$ og $G(\vec{a}) \neq 0$.

Bevis Tar $F-G$ som eksempel. Gitt $\varepsilon > 0$

$$\left| [F(\vec{x}) - G(\vec{x})] - [F(\vec{a}) - G(\vec{a})] \right|$$

$$= \left| [F(\vec{x}) - F(\vec{a})] + [G(\vec{a}) - G(\vec{x})] \right|$$

$$\leq |F(\vec{x}) - F(\vec{a})| + |G(\vec{a}) - G(\vec{x})|$$

(trekantulikheten: $|\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$)

Siden F er kontinuerlig i $\vec{a}$ fins δ_1 slik at hvis $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_1$, så er

$$|F(\vec{x}) - F(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Og siden G er kontinuerlig i $\vec{a}$ fins δ_2 slik at hvis $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_2$, så er

$$|G(\vec{x}) - G(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

La δ være den minste av δ_1 og δ_2. Hvis da $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ har vi

$$|F(\vec{x}) - F(\vec{a})| + |G(\vec{x}) - G(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

$\boxed{\text{Setning 2.2.3 Hvis } \vec{G} \text{ er kontinuerlig i } \vec{a} \text{ og } \vec{F} \text{ er kontinuerlig i } \vec{G}(\vec{a}) \text{, så er } \vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x})) \text{ kontinuerlig i punktet } \vec{a}.}$

Bevis: Se bok

$\boxed{\text{Setning 2.2.4 } \vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x})) \text{ er kontinuerlig i } \vec{x} \text{ hvis og bare hvis hver komponentfunksjon } F_i \text{ er kontinuerlig i } \vec{x}}$

Bevis: Se bok

Dette kan brukes til å vise at funksjoner slik at hver komponentfunksjon er kontinuerlig, også er kontinuerlige. Se eksempel 1 s. 83. Bruk dette på oppgave 2.2.1 og 2.2.2.

Grenseverdier (2.3)

Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et opphopningspunkt for en mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hvis enhver kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$ inneholder uendelig mange punkter fra A.

Definisjon (grense)

La $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og anta at $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ er et opphopningspunkt for A. Vi sier at $b \in \mathbb{R}^m$ er grenseverdien for $\vec{F}$ i $\vec{a}$ hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon \quad \text{for alle } x \in A \text{ slik at } 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$$

Får da setningene 2.3.3, 2.3.4 og 2.3.5.
Dermed er alt "normalt".