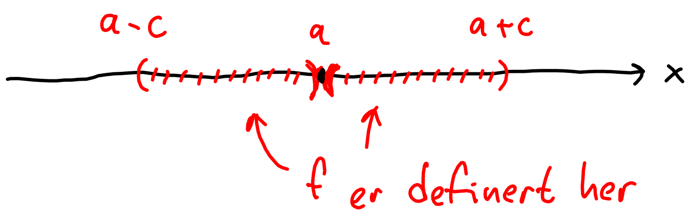
Grenseverdier (5.4)

At f er definert i nærheten av a betyr at det fins et tall $c > 0$ slik at

$$(a-c, a) \cup (a, a+c) \subseteq D_f$$



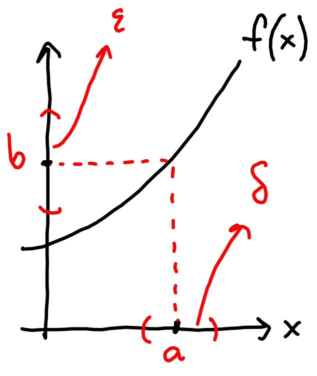
Definisjon av grense

Anta at f er definert i nærheten av a.
At

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

betyr at det for alle $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

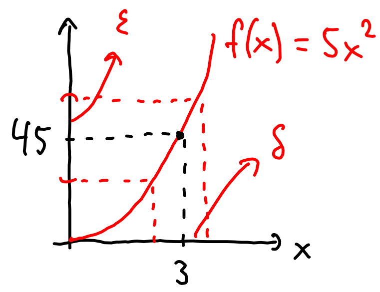
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$



eks. Vis at $\lim_{x\to 3} 5x^2 = 45$ ved definisjonen.

Løsn. La $f(x) = 5x^2$. Må vise at det for gitt $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 45| < \varepsilon$$



Har $f'(x) = 10x$

$f'(3) = 10 \cdot 3 = 30$

Så $\delta = \frac{\varepsilon}{30}$, kanskje?

Vi regner:

$$|f(x) - 45| = |5x^2 - 45| \qquad (\text{Trix: } x = 3 + h)$$

$$= |5(3+h)^2 - 45|$$

$$= |\cancel{45} + 30h + 5h^2 - \cancel{45}|$$

$$= |h(30 + 5h)|$$

Vi vil ha dette mindre enn en gitt ε. Tenker i to trinn:

Hvis $|h| < 1$, er

$$|h(30+5h)| < |h \cdot (30 + 5 \cdot 1)| = |35h|$$

$$= 35 \cdot |h|$$

Vi kan så få dette mindre enn ε ved å velge h slik at

$$35 \cdot |h| < \varepsilon, \text{ dvs. } |h| < \frac{\varepsilon}{35}$$

Kan da velge δ slik at $\delta < 1$ og $\delta < \frac{\varepsilon}{35}$

Skriver da $\delta < \min\{1, \frac{\varepsilon}{35}\}$. $\square$

Regneregler for grenseverdier (5.4.3)

Hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ og $\lim_{x\to a} g(x)$ begge fins, er

(i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

(iv) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Bevis Tilsvarende som beviset for setning 5.1.4. $\square$

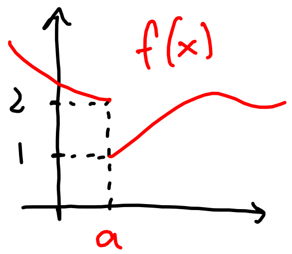
eks. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x + x}{x} \overset{\text{trix}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin x}{x} + 1}{1}$

$\overset{(iv)}{=} \dfrac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + 1\right)}{\lim_{x\to 0} 1} \overset{(i)}{=} \dfrac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} 1}$

$= \dfrac{1+1}{1} = \underline{\underline{2}}$ (brukte at $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$)

Ensidige grenser

eks.



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = 2$$

Formelle definisjoner av ensidige grenser:
Tilsvarende definisjonen av "tosidig" grense. Se bok.

Observasjon (5.4.7)

La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dvs. $D_f = [a, b]$.

For alle $c \in (a, b)$ gjelder da

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = c.$$

Videre:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = b$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \iff f \text{ er kontinuerlig i } x = a$$

eks. Vis at

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{for } x > 0 \\ 1 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$.

Løsn. Vi må vise at

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Vi har $f(0) = 1$. Vi har også

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

Ergo $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$. Så f er kontinuerlig i punktet $x = 0$. $\square$

Eksempel på formell definisjon av en annen type grense

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ betyr

For alle N fins M slik at

$x > M \Rightarrow f(x) > N$