Derivasjon av skalarfelt (2.4)

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la $f : A \to \mathbb{R}$ og la $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ være et indre punkt i $A = D_f$. Da er

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(\vec{a})}{h}$$

den partiellderiverte av f med hensyn på x_i.

Hvis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $\vec{a} = (x, y)$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

eks $f(x,y) = x^2 y^7$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 y^7 - x^2 y^7}{h}$$

$$= y^7 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = y^7 \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}}$$

$$= y^7 \cdot \lim_{h \to 0} (2x + h) = \underline{\underline{2xy^7}}$$

Altså: Vi kan finne partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ved å oppfatte alle variable unntatt x_i som konstante tall, og derivere på vanlig måte.

eks. $f(x,y) = 3 + y^2$

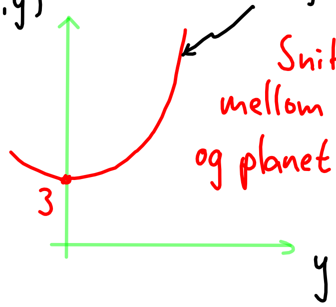
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

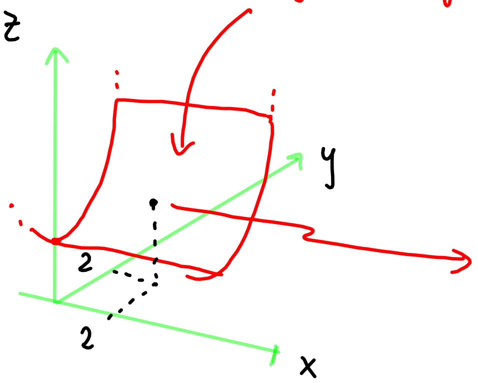
$z = f(x,y)$

$f(0,y) = 3 + y^2$

Snittet mellom grafen og planet $x = 0$



$f(x,y) = 3 + y^2$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 4$$

stign. 4 hvis vi går i y-retning ut fra punktet eks. $f(x,y) = x^2 + y^2$

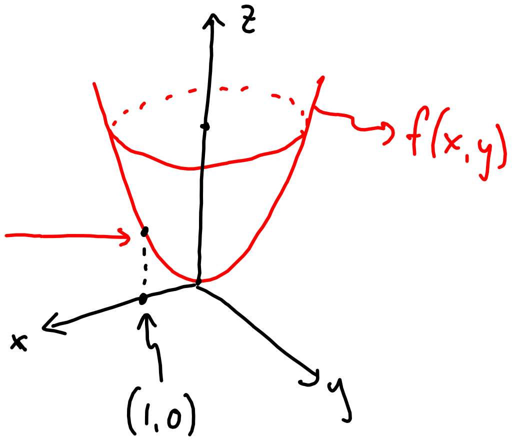
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

stigning 2
hvis du beveger
deg i x-retning
ut fra dette
punktet



eks. $f(x,y,z) = \sin x \cdot e^{xyz} + 5yz + 6\sin(xy)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot e^{xyz} + \sin x \cdot e^{xyz} \cdot yz + 6\cos(xy) \cdot y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot e^{xyz} \cdot xz + 5z + 6\cos(xy) \cdot x$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \sin x \cdot e^{xyz} \cdot xy + 5y + 0$

$\boxed{\text{Høyere ordens partielle deriverte}}$

La $f(x,y) = 2x^3 + 5xy^2$

Vi har:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 5y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy$$

Videre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 12x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 10y$$

Disse er like! Ikke tilfeldig.

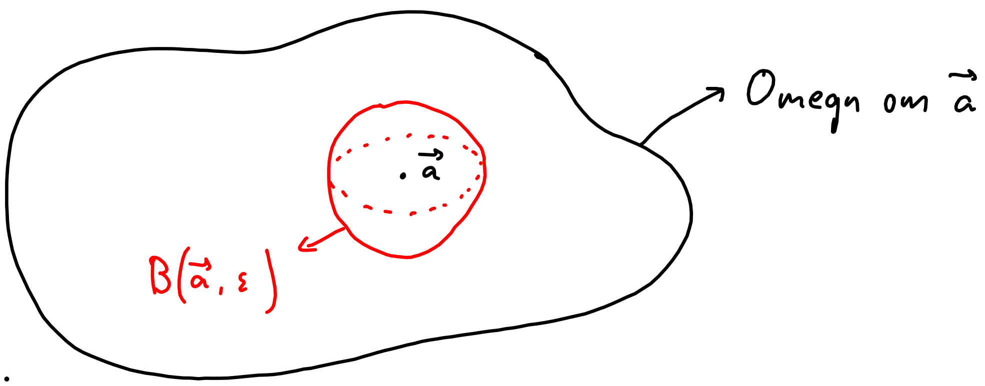
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 10x$$

Dette er de fire annen ordens partiellderiverte av f. Videre:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 10.$$

OSV.

La $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. En omegn om $\vec{a}$ er en delmengde av $\mathbb{R}^n$ som inneholder en kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ om $\vec{a}$, der $\varepsilon > 0$.



Teorem Hvis f er et skalarfelt av n variable, og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ begge fins i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a})$.

Bevis Bruker middelverdisetningen. Se side 103. $\square$