Derivasjon (6.1, 6.2)

Definisjon $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eks $f(x) = x^3$ gir

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(x^2 + 2hx + h^2) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x^3} + 2hx^2 + h^2x + hx^2 + 2h^2x + h^3) - \cancel{x^3}}{h}$$

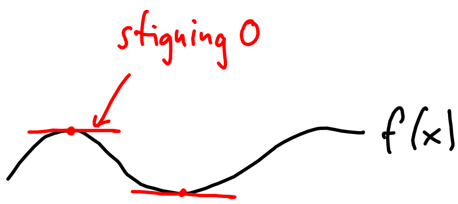
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + \underbrace{hx}_{\to 0} + x^2 + \underbrace{2hx}_{\to 0} + \underbrace{h^2}_{\to 0}}{1} = 3x^2$$

Teorem Anta at f er deriverbar.

① Hvis f er deriverbar i $x = a$, så er f kontinuerlig i $x = a$.

② Hvis a er et lokalt ekstremalpunkt for f i det indre av D_f (altså ikke et endepunkt, for eksempel), så er $f'(a) = 0$.

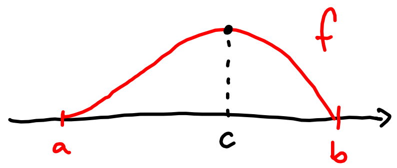
Bevis Se lærebok.



Rolles teorem

Anta at f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b).
Hvis $f(a) = f(b) = 0$, så fins minst ett punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = 0.$$



Bevis Ekstremalverdisetningen. Se evt bok. $\square$

Cauchys middelverditeorem (6.3.1)

Hvis f og g er kontinuerlige på $[a,b]$ og deriverbare på (a,b), så fins $c \in (a,b)$ slik at

$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c) = [g(b)-g(a)]\cdot f'(c)$$

Bevis La $h(x) = [f(a)-f(x)]\cdot[g(b)-g(a)] + [g(x)-g(a)]\cdot[f(b)-f(a)]$.

Vi ser da:

$$h(b) = 0 = h(a)$$

$$h'(x) = -f'(x)\cdot[g(b)-g(a)] + g'(x)\cdot[f(b)-f(a)]$$

Ved Rolles teorem fins dermed $c \in (a,b)$ slik at $h'(c) = 0$, dvs.

$$0 = -f'(c)\cdot[g(b)-g(a)] + g'(c)\cdot[f(b)-f(a)]. \quad \square$$

Middelverdisetningen (6.2.3)

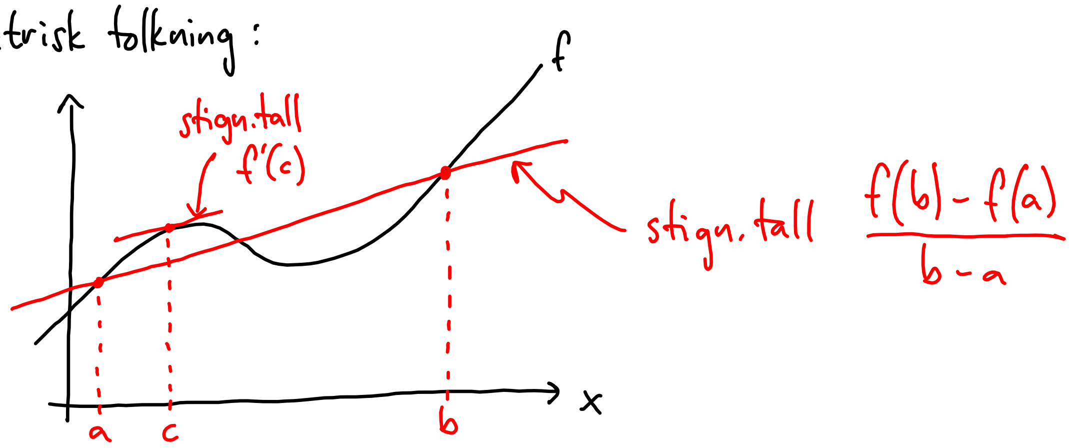
La f være kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b).
Da fins $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Bevis $g(x) = x$ i Cauchys middelverditeorem gir

$$[f(b)-f(a)]\cdot 1 = (b-a)\cdot f'(c). \quad \Box$$

Geometrisk tolkning:



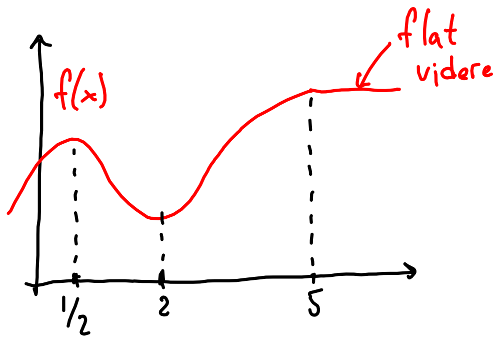
Definisjon

La $I \subseteq D_f$ være et intervall, og la a og b være to vilkårlige punkter i I. At f er

strengt voksende på I betyr at $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
voksende — " — $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
strengt avtakende — " — $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
avtakende — " — $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

"Monoton" er en fellesbetegnelse på "voksende" og "avtakende".

eks.



f er da:

strengt voksende på $[2, 5]$
strengt avtakende på $[\frac{1}{2}, 2]$
voksende på $[2, 6]$

Teorem Anta at f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$.

- Hvis $f'(x) > 0$ på (a, b), så er f strengt voksende på $[a, b]$.
- Hvis $f'(x) < 0$ på (a, b), — " — avtakende — " —

Bevis Anta $f'(x) > 0$ på (a, b).

La p og q være to punkter i $[a, b]$ med $p < q$.
Middelverditeoremet sier da:

$$\frac{f(q) - f(p)}{\underbrace{q - p}_{\text{positiv}}} = \underbrace{f'(c)}_{\text{positiv}} \qquad (c \text{ mellom } p \text{ og } q)$$

Dermed må $f(q) - f(p) > 0$, dvs. $f(q) > f(p)$.
Altså er f strengt voksende på $[a, b]$.
Tilfellet der $f'(x) < 0$ fås tilsvarende $\square$