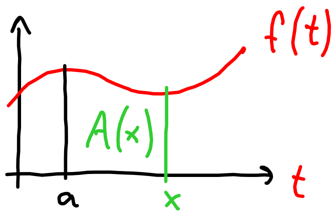
Korollar av fundamentalteoremet

Hvis F og f er kontinuerlige på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$$

Bevis Ved fundamentalteoremet vet vi at

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



oppfyller $A'(x) = f(x)$.

Da er $F'(x) = A'(x)$, så $F(x) = A(x) + C$.

Dermed:

$$F(b) - F(a) = \left[A(b) + \cancel{C}\right] - \left[A(a) + \cancel{C}\right]$$

$$= A(b) - \underbrace{A(a)}_{0} = A(b)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt. \quad \square$$

8.4 Det ubestemte integralet

Vi definerer det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx$$

til å være den "generelle antideriverte" til f.

Hvis $F'(x) = f(x)$, er altså

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Regler for ubestemte integraler

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Husk at: $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x}$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{hvis } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{hvis } x > 0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Substitusjon (setning 8.4.5)

Anta at g er deriverbar, f er kontinuerlig og at F er en antiderivert av f. Da er

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Bevis Den deriverte av $F(g(x)) + C$ er (kjerneregelen)

$$F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x). \quad \square$$

Hvordan bruke substitusjon?

1. Finn en kjerne $u(x)$ i integralet
2. Regn ut:

$$\frac{du}{dx} = u'(x), \quad du = u'(x)\,dx, \quad dx = \frac{1}{u'(x)}\,du$$

3. Sett inn for u og dx i integralet. Metoden fungerer hvis alle x-ene forsvinner.

eks.

$$\int x e^{x^2}\,dx = \int \cancel{x}\, e^{u} \frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2} e^{u} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{x^2} + C}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} u = x^2, & \dfrac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x \cdot dx, & dx = \dfrac{1}{2x}\,du \end{matrix}}$$

8.5 Riemannsummer

Gitt en partisjon $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ av $[a, b]$.

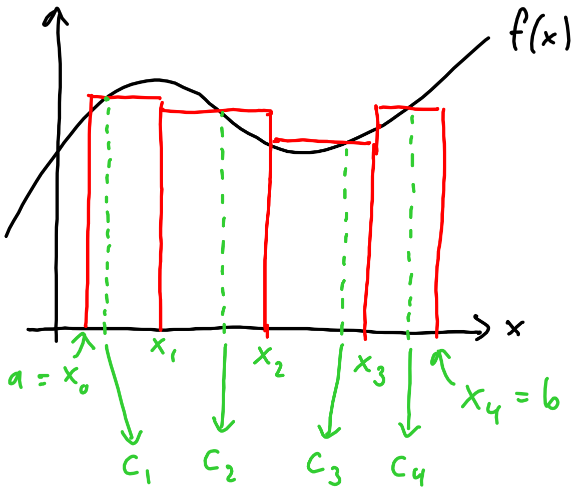
$U = \{c_1, \dots, c_n\}$ kalles et utvalg for Π hvis

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{for alle } i.$$

Definisjon 8.5.1 (Riemann-sum)

La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Riemannsummen for f på $[a,b]$ tilsvarende Π og U er

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \quad \text{der } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Her er $n = 4$

$$\Pi = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$U = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

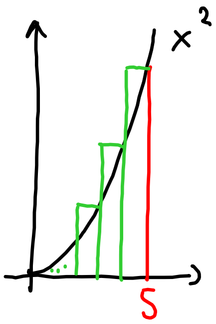
eks $f(x) = x^2$

Π_n : Partisjon av $[0,5]$ med n like lange delintervaller

c_i : Høyre endepunkt i hvert intervall

Skal finne $R(\Pi_n, U_n)$ der U_n er utvalget vi får

Løsn.



$\Delta x_i = \frac{5}{n}$ for alle i

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = n \cdot \frac{5}{n} = 5$

$x_1 = \frac{5}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{5}{n}$ osv.

$$R(\Pi_n, U_n) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\cdot\Delta x_n$$

$c_i = x_i$ for alle i

$$= f(x_1)\cdot\frac{5}{n} + f(x_2)\cdot\frac{5}{n} + \dots + f(x_n)\cdot\frac{5}{n}$$

$$= x_1^2\cdot\frac{5}{n} + x_2^2\cdot\frac{5}{n} + \dots + x_n^2\cdot\frac{5}{n}$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + \left(2\cdot\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n} + \dots + \left(n\cdot\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^3 + 2^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^3 + \dots + n^2\cdot\left(\frac{5}{n}\right)^3$$

$$= \left(\frac{5}{n}\right)^3 \underbrace{\left[1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right]}_{\text{dette har vi en formel for: } \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$$

$$= 5^3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{125}{3}$$

($\frac{1}{2n} \to 0$, $\frac{1}{6n^2} \to 0$)

Og vi har $\int_0^5 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{125}{3}$

Maskevidden til en Riemannsum: Største bredde Δx_i.

8.5.3 Integralet som grense for Riemannsummer

La f være begrenset på $[a,b]$. Da er f integrerbar på $[a,b]$ med integral I hvis og bare hvis det for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at alle Riemannsummer R for f på $[a,b]$ med maskevidde mindre enn δ oppfyller $|R - I| < \varepsilon$.

Bevis Se bok. $\square$

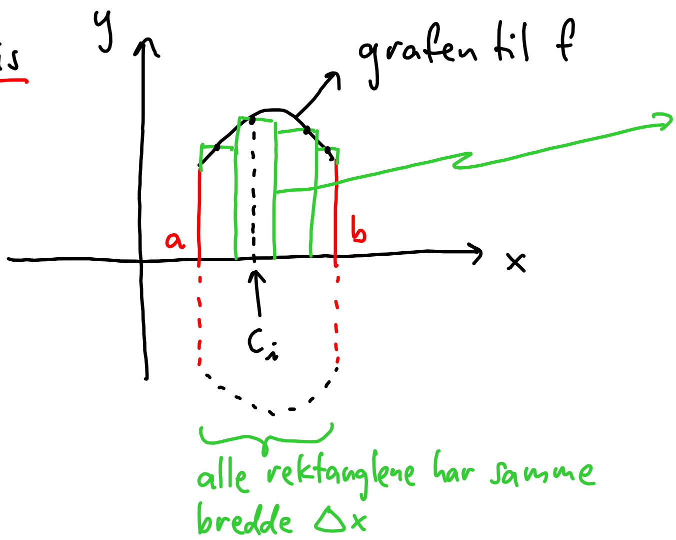
Anvendelser av integralet (8.6)

Omdreiningslegeme om x-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a, b]$.
Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a, b]$ roteres om x-aksen, er

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

Bevis



Når vi roterer, gir dette rektanglet en sylinderformet skive med radius $f(c_i)$ og tykkelse Δx

Volum av skiven:

$$\Delta V_i = \text{grunnflate} \cdot \Delta x = \pi \cdot [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x$$

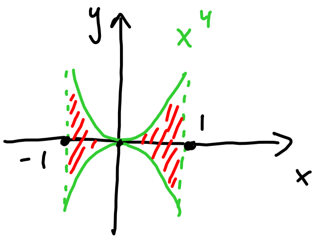
Summen av volumet til alle skivene:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(c_i)]^2 \cdot \Delta x$$

Dette er en Riemannsum for funksjonen $\pi \cdot [f(x)]^2$ på $[a, b]$. Så når $\Delta x \to 0$, nærmer den seg

$$\int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 \, dx \, . \quad \square$$

eks. Skal finne volumet av omdreiningslegemet som fås når grafen til $f(x) = x^4$ på $[-1, 1]$ dreies om x-aksen.



$$V = \int_{-1}^{1} \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi \left(x^4\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{9} x^9\right]_{-1}^{1}$$

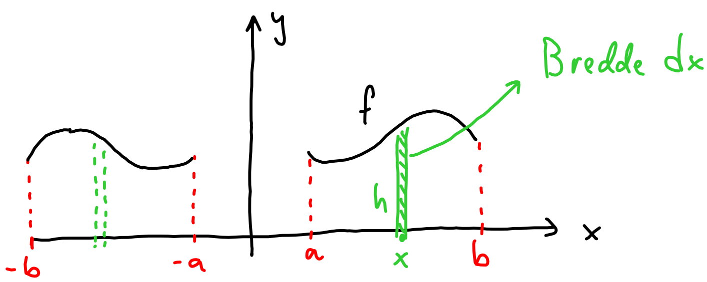
$$= \pi \cdot \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{9}}}$$

Omdreiningslegeme om y-aksen

Anta at f er kontinuerlig og ikke-negativ på $[a, b]$, der $a \geq 0$. Volumet av legemet vi får når området under grafen til f på $[a, b]$ roteres om y-aksen, er

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

Illustrasjon/bevis



Når den roteres, gir den skraverte grønne stripen et sylinderskall med radius x og høyde $h = f(x)$

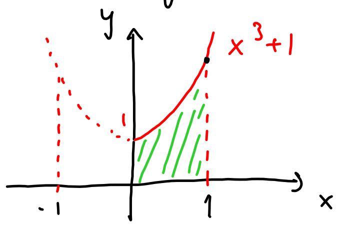
Sylinderskallet har altså

areal = omkrets · høyde = $2\pi x \cdot f(x)$

volum ≈ areal · tykkelse = $2\pi x \cdot f(x) \cdot dx = dV$

"Summerer": $V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\, dx$. □

eks. Skal finne volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til $f(x) = x^3 + 1$ på $[0,1]$ roteres om y-akson.



$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot f(x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(x^3+1)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right]$$

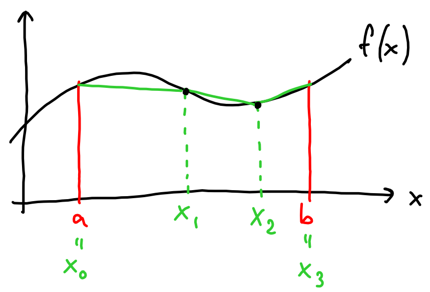
$$= 2\pi \left[\frac{7}{10} \right] = \frac{7}{5}\pi$$

Lengden av grafen til en funksjon f på et intervall $[a,b]$

Vi lager en partisjon

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

måler lengden av linjestykket fra $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ til punktet $(x_i, f(x_i))$ på grafen for hver i, og summerer:



Her er $n = 3$.

Vi definerer lengden av grafen til f på $[a,b]$ som minste øvre skranke (begrensning) for mengden av lengdeanslag vi får på denne måten.

Teorem (graflengde)
Hvis $f'(x)$ er kontinuerlig på $[a,b]$, så er lengden s av grafen til f på $[a,b]$ gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Bevis: Se bok. □