Definisjon

La $f : A \to \mathbb{R}$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$. La $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ være et indre punkt i A, dvs. A er en omegn om $\vec{a}$.

① Den retningsderiverte av f langs vektoren $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ i punktet $\vec{a}$ er da

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

② Gradienten til f i punktet $\vec{a}$ er vektoren

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

Digresjon om funksjoner f av en variabel

La
$$\sigma(h) \overset{\text{def}}{=} f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h$$

Da:
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right]$$

$f'(x)$

$$= f'(x) - f'(x) = 0$$

hvis f er deriverbar i x.

Inspirert av dette:

Definisjon av deriverbarhet for skalarfelt f av flere variable

f kalles deriverbar i $\vec{a}$ dersom alle de partielle deriverte fins der og feil-leddet

$$\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a}+\vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} \qquad (*)$$

oppfyller

$$\lim_{\vec{r}\to\vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$$

Teorem Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$ (boks over), har vi

$$\boxed{f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}}$$

Bevis

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

(*) med $h\vec{r}$ som $\vec{r}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(h\vec{r}) + \sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\nabla f(\vec{a})\cdot(\cancel{h}\vec{r})}{\cancel{h}} + \lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h}$$

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(h\vec{r})}{h\cdot|\vec{r}|}}_{=0}\cdot|\vec{r}|$$

0 pga (*) med $h\vec{r}$ som $\vec{r}$.

$$= \nabla f(\vec{a})\cdot\vec{r}. \qquad \square$$

Teorem
Hvis alle de partielle deriverte av f fins i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i $\vec{a}$.

Bevis Se bok. $\square$

eks. La $f(x,y) = xy + 2y$, $\vec{a} = (2,5)$ og $\vec{r} = (2,1)$. Finn $f'(\vec{a};\vec{r})$.

Løsn.
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x+2)$$

$$\nabla f(\vec{a}) = (5, 4) \quad \text{pga. } (x,y) = (2,5)$$

Altså:
$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (5,4)\cdot(2,1) = 10 + 4 = \underline{\underline{14}}$$

eks. La $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Da er
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$$

$$f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (2x, 2y, 2z) \cdot \vec{r} = \underline{\underline{\text{osv.}}}$$

Teorem Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, peker gradienten $\nabla f(\vec{a})$ i den retningen hvor f vokser raskest ut fra punktet $\vec{a}$.

Bevis Vi har $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

$$= |\nabla f(\vec{a})| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\theta,$$

der θ er vinkelen mellom $\nabla f(\vec{a})$ og $\vec{r}$.

Faktoren $\cos\theta$ blir størst når $\theta = 0$. $\square$

eks. Avgjør i hvilken retning funksjonen

$$f(x,y,z) = xyz$$

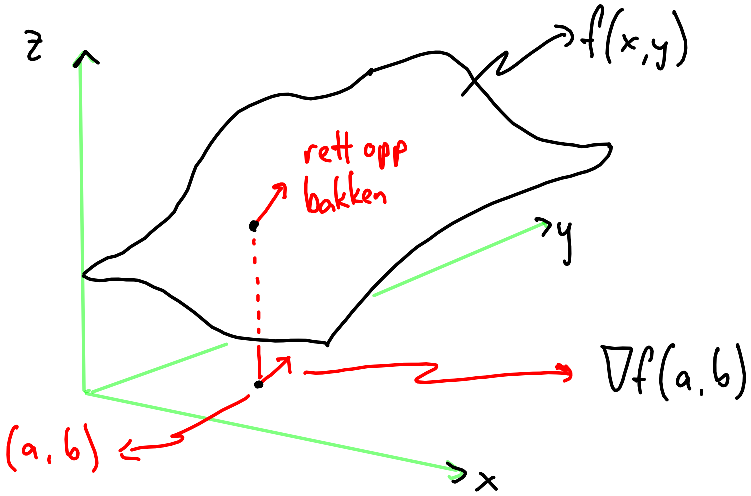
vokser raskest ut fra punktet $(1,1,2)$

Løsn. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy)$

$$\nabla f(1,1,2) = (2, 2, 1)$$

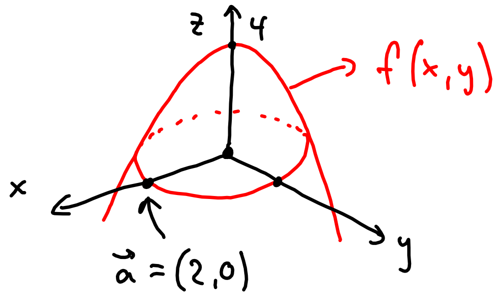
f vokser raskest i retningen $\underline{\underline{(2,2,1)}}$. $\square$

Fjelltur: Gradientretningen til terrenget peker "rett opp bakken" (på kartet)



eks.

$$f(x,y) = 4-(x^2+y^2) = 4-x^2-y^2$$



$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-2x, -2y)$$

$$\nabla f(\vec{a}) = \nabla f(2,0) = (-4, 0).$$