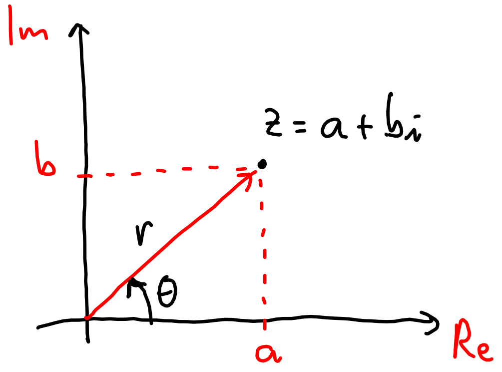
Polarkoordinater for komplekse tall

Polarkoordinatene kan bl.a. brukes til å finne en geometrisk tolkning av kompleks multiplikasjon. Se senere.

Polarkoordinatene r og θ til et komplekst tall.



r = avstand fra z til origo
$= \sqrt{a^2 + b^2}$

θ = vinkel mot klokken regnet fra første akse, målt i RAD.

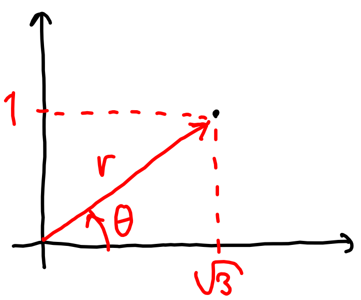
Vi har $\quad \dfrac{a}{r} = \cos\theta$, så $a = r\cos\theta$

$\dfrac{b}{r} = \sin\theta$, så $b = r\sin\theta$

Ergo: $z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$

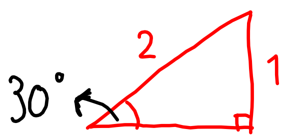
eks Finn polarkoordinatene til $z = \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + 1 \cdot i$

Løsn. Lurt å tegne figur.



Pyt: $r^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$
$= 3 + 1 = 4$
$r = 2$

Så $\theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$



Polarkoordinatene til z er $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

Komplekse tall på eksponentiell form $z = re^{i\theta}$

Man kan vise (Kalkulus setning (12.8.2)) at for alle reelle tall x gjelder $(4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Hvis rekkene skal gjelde med $x = i\theta$, får vi

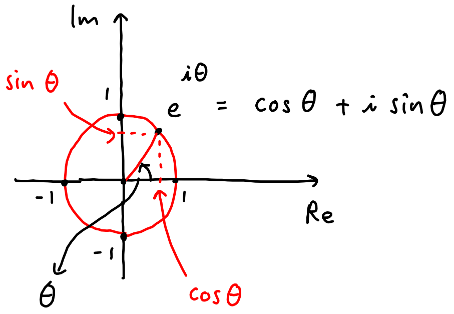
$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + \underline{i\theta} - \frac{\theta^2}{2!} \underline{- i\frac{\theta^3}{3!}} + \frac{\theta^4}{4!} \underline{+ i\frac{\theta^5}{5!}} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \underline{\underline{\cos\theta + i \cdot \sin\theta}}$$

Figur :

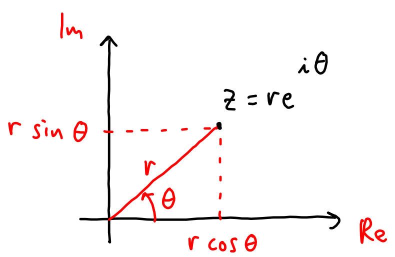


Dermed gjør vi følgende definisjon :

$$re^{i\theta} = r \cdot e^{i\theta} = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

$$= (r\cos\theta) + i\,(r\sin\theta)$$

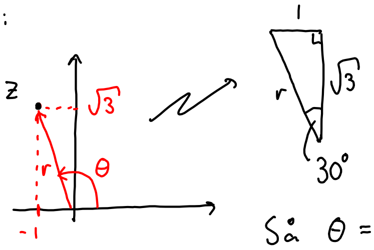
Figur :



Å skrive et komplekst tall z på formen $z = re^{i\theta}$, kalles å skrive z på eksponentiell form.

eks. Skriv $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ på formen $z = re^{i\theta}$

Løsn. Figur:



Pyt: $r^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

$r^2 = 4$

$r = 2$

dvs. 30/60/90

Så $\theta = 90° + 30° = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$

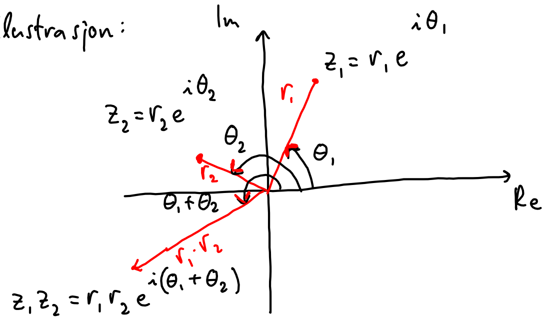
Så $z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

Teorem 3.2.3 (Caspar Wessel, 1797)

Hvis $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, så er

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Illustrasjon:



Bevis

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \overset{-1}{i^2} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \right]$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) i \right]$$

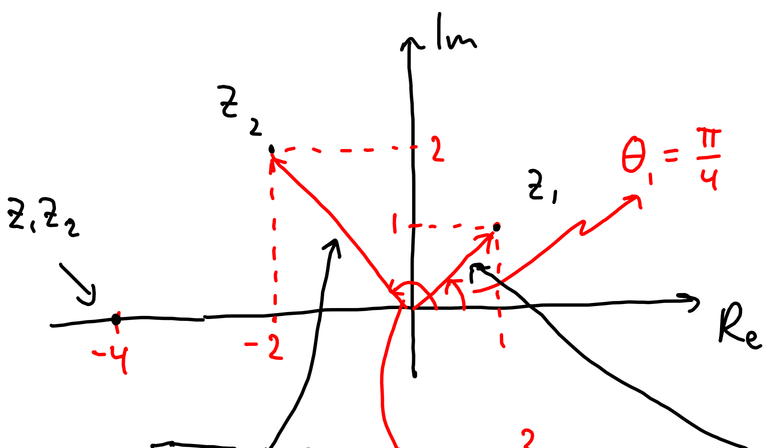
Summeformler for sinus og cosinus

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\, i \right]$$

$$\overset{\text{def}}{=} r_1 r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \square$$

eks. $z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -2 + 2i$

Skal regne ut $z_1 \cdot z_2$ på to ulike måter.



Måte 1:

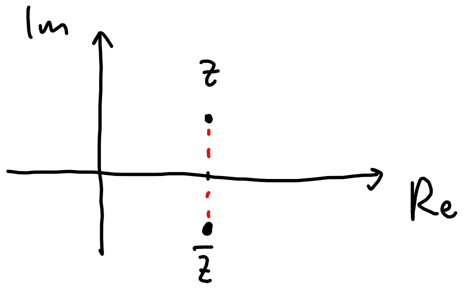
$$z_1 z_2 = (1+i)(-2+2i)$$
$$= -2 + \cancel{2i} - \cancel{2i} + 2i^2 \qquad (i^2 = -1)$$
$$= \underline{\underline{-4}}$$

$r_2 = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \qquad \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \qquad r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Måte 2:
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2} \cdot e^{i(\pi/4)} \cdot \sqrt{8}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{2 \cdot 8}\, e^{i\pi} = 4 \overbrace{e^{i\pi}}^{-1}$$
$$= 4(\underbrace{\cos \pi}_{-1} + i \underbrace{\sin \pi}_{0}) = \underline{\underline{-4}}$$

Merk at $e^{i\pi} = -1$, dvs. $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Den konjugerte av $z = a + bi$ er $\bar{z} = a - bi$



eks. $z = 2 + 3i$ gir $\bar{z} = 2 - 3i$

eks. $\overline{i^3(-7+6i)} = \overline{-7i^3 + 6i^4} = \overline{-7i \cdot i^2 + 6\cdot(-1)^2}$

$= \overline{7i + 6} = \overline{6 + 7i} = \underline{\underline{6 - 7i}}$

Merk: $z \cdot \bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi)$

$= (a^2 + \cancel{bia} - \cancel{abi} - b^2 \overset{-1}{i^2})$

$= a^2 + b^2 = r^2$

Så hvis $z = re^{i\theta}$, er $\boxed{z \cdot \bar{z} = r^2}$

Teorem 3.1.5

(i) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$

(ii) $\bar{z} - \bar{w} = \overline{z - w}$

(iii) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$

(iv) $\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

Bevis: Oppgave 3.1.8.

Divisjon av komplekse tall

For å finne $\frac{z}{w}$, gang med $\overline{w}$ oppe og nede på brøken.

eks. $$\frac{5+i}{4-3i} = \frac{(5+i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{20+4i+15i-3}{16-\cancel{12}i+\cancel{12}i-9i^2} \quad -1$$

$$= \frac{17+19i}{25} = \underline{\underline{\frac{17}{25} + \frac{19}{25}i}}$$

Definisjon

$$z^{-1} \overset{def}{=} \frac{1}{z} \qquad z^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{z^n} \quad \text{for hele tall } n = 1, 2, 3, \ldots$$

eks. $$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{0+1i} = \frac{1\cdot(0-1i)}{(0+1i)(0-1i)}$$

$$= \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = \underline{\underline{-i}}$$

De Moivres formel For alle naturlige tall n er

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}, \quad \text{så}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Begrunnelse: Se snart.

eks. Uttrykk $\cos 2\theta$ og $\sin 2\theta$ ved $\cos\theta$ og $\sin\theta$

Løsn. $\cos 2\theta + i\sin 2\theta \overset{DM}{=} (\cos\theta + i\sin\theta)^2$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta + i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (2\sin\theta\cos\theta)\,i$$

Ergo $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ og $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. $\square$

Definisjon Hvis $z = a + bi$, definerer vi

$$e^z = e^{a+bi} \overset{def}{=} e^a e^{ib}$$

definert før

reelt tall

Teorem $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ for alle komplekse tall z og w

Bevis $e^z \cdot e^w = e^{a+ib}\cdot e^{c+id}$ (der $z = a+ib$, $w = c+id$)

$$\overset{def}{=} e^a \cdot e^{ib} \cdot e^c \cdot e^{id}$$

teo 3.2.5 $\quad = (e^a e^c)(e^{ib} e^{id})$

teo 3.2.3 $\quad = e^{a+c} e^{i(b+d)}$

$$\overset{def}{=} e^{(a+c)+(b+d)i} = e^{z+w}. \quad \square$$

(Dette gir også det vi manglet for å begrunne De Moivres formel)

Geometri i det komplekse planet $\mathbb{C}$

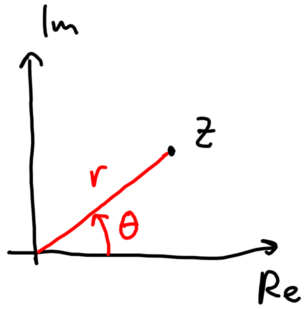
Hvis $z = re^{i\theta}$, så er

r avstanden fra z til origo,

dvs. r er lengden av vektoren z

Ofte skriver man $r = |z|$

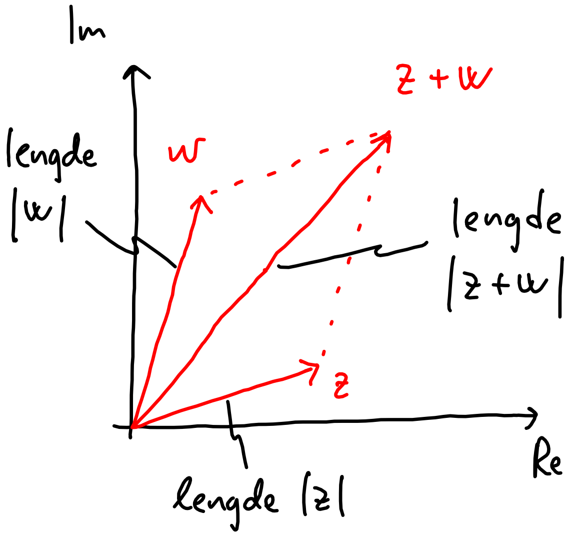
$|z|$ kalles <u>modulusen</u> til z



Kompleks trekantulikhet

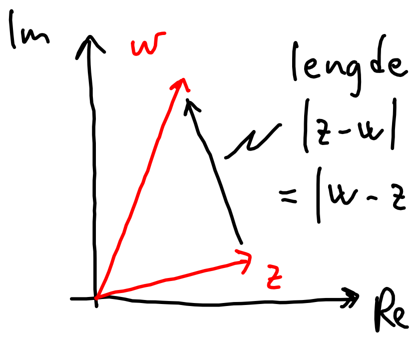
For alle $z, w \in \mathbb{C}$ gjelder

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$



Avstand i det komplekse planet

$|z - w|$ er avstanden fra z til w



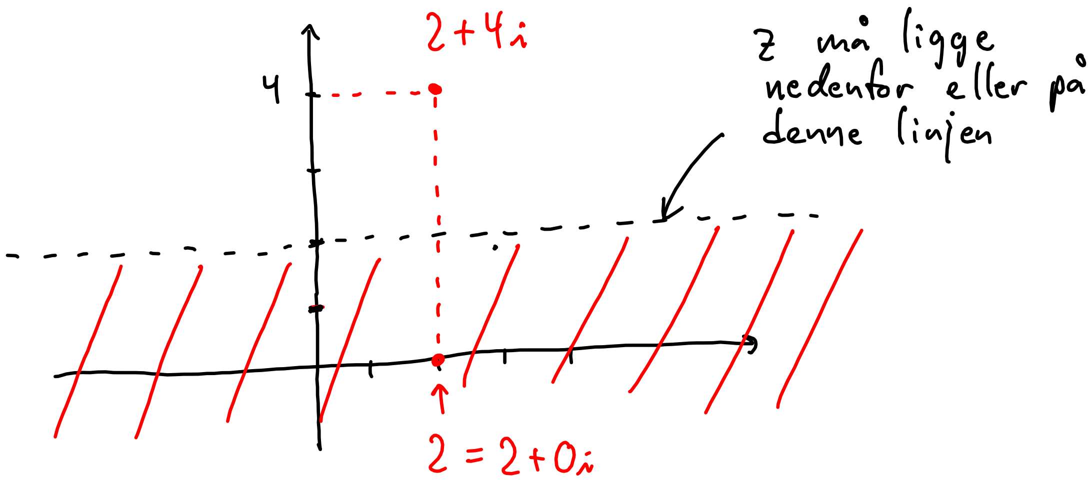
eks. Skisser delmengden av $\mathbb{C}$ gitt ved

$$\{z : |z-2| \leq |z-2-4i|\}$$

Løsn. Trix:

$$|z-2-4i| = |z-(2+4i)| = \left\{\begin{array}{l}\text{avstanden fra } z \\ \text{til punktet} \\ \quad 2+4i\end{array}\right.$$

$$|z-2| = \text{avstanden fra } z \text{ til punktet } 2 = 2+0i$$



Løse likninger med komplekse tall som ukjente

eks. $3i + 10z - iz = 8z$

Vi regner vanlig:

$$10z - 8z - iz = -3i$$

$$2z - iz = -3i$$

$$(2-i)z = -3i$$

$$z = \frac{-3i}{2-i} \overset{\text{trix}}{=} \frac{-3i(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$= \frac{-6i - 3i^2}{4 - i^2} = \frac{-6i + 3}{5}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i}}$$