$\boxed{\text{l'Hopitals regel (6.3)}}$

Teorem (l'Hopital)

Hvis $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, så er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

gitt at grensen til høyre fins eller er $\pm\infty$.

Bevis Vi kan anta at $f(a) = g(a) = 0$. Da får vi kontinuitet. Cauchys middelverditeorem gir

$$[f(x) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(x) - g(a)] \cdot f'(c)$$

for en c mellom a og x. Altså

$$f(x) \cdot g'(c) = g(x) \cdot f'(c)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

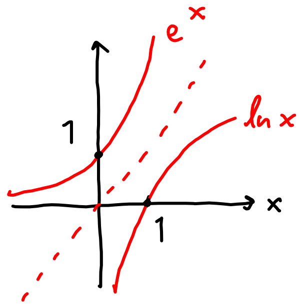
Så $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

siste likhet fordi c er mellom a og x. $\square$

eks. 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \overset{\to 0}{\sin x}}{1}$$

$$= \frac{e^0 + 0}{1} = \underline{\underline{1}}$$



eks. 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{e^{2x} - e^x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot(\sin x)^2 \cdot \cos x}{e^{2x}\cdot 2 - e^x}$$

$$= \frac{3\cdot 0\cdot 1}{1\cdot 2 - 1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

Varianter av l'Hopitals regel

① Broken $\frac{f(x)}{g(x)}$ kan gå mot $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$ eller $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$ istedenfor $\left[\frac{0}{0}\right]$

② Vi kan ha $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$ istedenfor $x \to a$. Grensen kan også være ensidig.

Bevis (eksempel)

Anta at grensen vår er $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

der $f(x) \to 0$ og $g(x) \to 0$.

Vi skifter variabel: $t = \frac{1}{x}$, dvs. $x = \frac{1}{t}$

$x \to \infty$ tilsvarer da $t \to 0^+$

Får:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot \cancel{\left(\frac{-1}{t^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot \cancel{\left(\frac{-1}{t^2}\right)}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

<u>eks. 1</u> $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 6x}{12x^2 + 17} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{6x + 6}{24x}$

$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{6}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

<u>eks. 2</u> $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x} \overset{\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x}{\frac{1}{x} \cdot x}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = \underline{\underline{-\infty}}$

<u>Formen $[0 \cdot \infty]$</u>

Metode: Skriv $f(x) \cdot g(x)$ som $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ eller $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

og bruk vanlig l'Hopital.

<u>eks.</u> $\lim_{x \to 0^+} x \ln x \overset{[0 \cdot \infty]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2}{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{-1}$

$= \underline{\underline{0}}$

Formen $[\infty - \infty]$

Metode: Kan prøve å sette på felles brøkstrek, evt faktorisere og lage $[0 \cdot \infty]$

eks. $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2^x - 1} \right) \overset{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2(2^x - 1) - x}{x(2^x - 1)}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - 1}{\underbrace{1 \cdot (2^x - 1) + x \cdot 2^x \cdot \ln 2}_{\text{nærmer seg 0 fra positiv side}}} = +\infty$$

$$2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{(\ln 2)x}$$

dvs. $$(2^x)' = \left(e^{(\ln 2)x}\right)' = e^{(\ln 2) \cdot x} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$$

Formene $[1^\infty]$, $[0^0]$ og $[\infty^0]$

Skriv om ved hjelp av $a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{(\ln a) b}$

og bruk l'Hopital på eksponenten.

eks. 1

$$\lim_{x\to 0^+} (3x)^x \overset{[0^0]}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\ln(3x)}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{(\ln 3x)\cdot x}$$

Eksponent:

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln 3x)\cdot x \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 3x}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{3x}\cdot 3 \quad \cdot x^2}{-\frac{1}{x^2} \quad \cdot x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-1} = 0.$$

Så $\lim_{x\to 0^+} (3x)^x = e^0 = \underline{\underline{1}}$

eks. 2

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} \overset{[\infty^0]}{=} \lim_{x\to\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Eksponenten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Så $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = e^0 = \underline{1}$