Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner (2.6)

Vektorvaluert funksjon av n variable :

$$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m \quad \text{der } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definisjon

Med Jacobimatrisen til en funksjon $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ av n variable i punktet $\vec{a}$ menes matrisen

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

der $\vec{F}(\vec{a}) = \left(F_1(\vec{a}), \ldots, F_m(\vec{a})\right)$

Funksjonene $F_1, \ldots, F_m$ kalles komponentfunksjonene til $\vec{F}$.

eks. 1 $\quad \vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ved $\vec{F}(x,y,z) = (x^2yz, xy^3)$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz & x^2z & x^2y \\ y^3 & 3xy^2 & 0 \end{pmatrix}$$

eks. 2 $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 2 & 3 & 2x+3y \\ -1 & 4 & -x+4y \end{array} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+4y \end{pmatrix}$$

$$= (2x+3y, -x+4y) \qquad \text{gir}$$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisjon

La $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ være en funksjon av n variable, og la $\vec{a}$ være et punkt i A. Vi sier at $\vec{F}$ er <u>deriverbar</u> i $\vec{a}$ hvis feilleddet

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) - \underbrace{\vec{F}'(\vec{a}) \cdot \vec{r}}_{\text{matriseprodukt}}$$

oppfyller

$$\lim_{\vec{r} \to \vec{0}} \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{0}.$$

Vi har da denne sammenhengen:

Teorem

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$. En funksjon $\vec F : A \to \mathbb{R}^m$ av n variable er deriverbar i $\vec a$ hvis og bare hvis alle komponentfunksjonene $F_1, \ldots, F_m$ er deriverbare i $\vec a$.

Bevis Vi har

$$\vec\sigma(\vec r) = \vec F(\vec a + \vec r) - \vec F(\vec a) - \underbrace{\vec F'(\vec a)\cdot \vec r}_{\text{matriseprodukt}}$$

Her er

$$\vec F'(\vec a)\cdot\vec r = \begin{array}{c|c} & r_1 \\ & r_2 \\ & \vdots \\ & r_n \\ \hline \boxed{\nabla F_1(\vec a)} & \nabla F_1(\vec a)\cdot\vec r \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{\nabla F_m(\vec a)} & \nabla F_m(\vec a)\cdot\vec r \end{array} = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec a)\cdot\vec r \\ \vdots \\ \nabla F_m(\vec a)\cdot\vec r \end{pmatrix}$$

Ergo er komponent nr. i av $\vec\sigma(\vec r)$ gitt ved

$$\vec\sigma_i(\vec r) = \underbrace{F_i(\vec a + \vec r) - F_i(\vec a) - \nabla F_i(\vec a)\cdot\vec r}_{*}$$

Høyresiden $(*)$ er nå restleddet $\sigma_{F_i}(\vec r)$ brukt i definisjonen av deriverbarhet for hver komponentfunksjon F_i.

Dermed

$$\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{\sigma}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{F_1}(\vec{r})}{|\vec{r}|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_{F_m}(\vec{r})}{|\vec{r}|} \end{pmatrix} \xrightarrow[\vec{r}\to\vec{0}]{\text{når}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ved antakelsen om deriverbarhet for alle F_i. Dette holder baklengs også. $\square$

Korollar

Anta at $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ har n variable og at $\vec{a} \in A$ er et indre punkt. Hvis alle komponentene i Jacobimatrisen er definert i en omegn om $\vec{a}$ og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er $\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$.

Konklusjonen vi kan trekke:

At $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ betyr at

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) \approx \vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

er en god tilnærming når $\vec{r}\to\vec{0}$. Vi kan også skrive

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) \approx \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})\cdot\vec{r}$$

Dette er analogt med situasjonen for funksjoner $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ av en variabel:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h$$