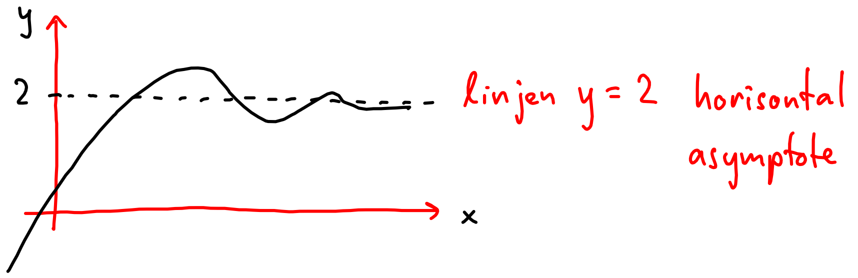
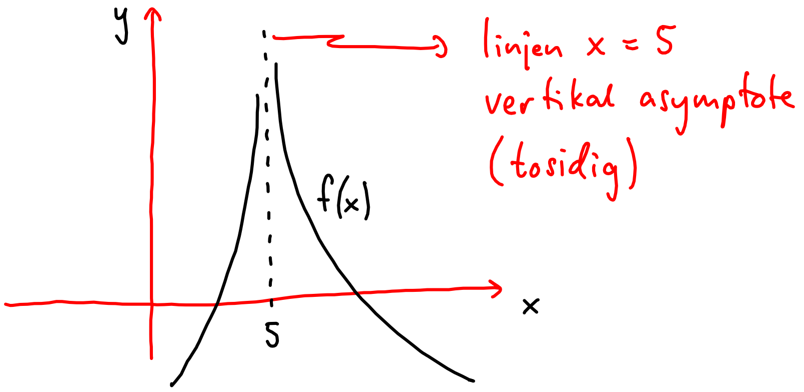
Asymptoter

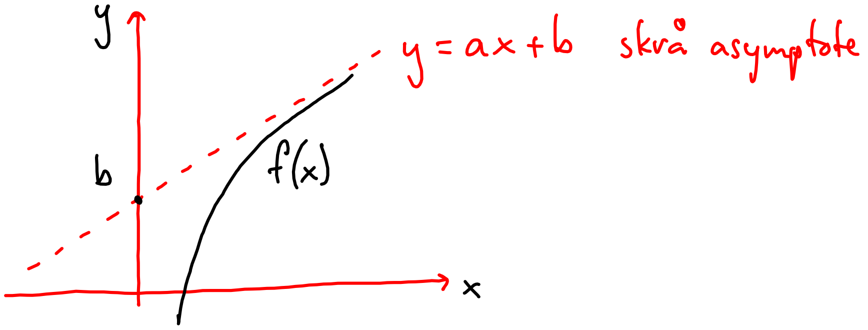
- Linjen $y = a$ kalles en horisontal asymptote for f hvis
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$



- Linjen $x = a$ kalles en vertikal asymptote for f hvis
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$



- Linjen $y = ax + b$ (der $a \neq 0$) kalles en skrå asymptote for f hvis
$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0 \quad \text{eller} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$$



Du kan finne skråasymptoter $y = ax + b$ slik: $(x \to -\infty$ tilsv.$)$

① Finn $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

② Finn $b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right] \overset{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \to \infty} ax \left[\frac{f(x)}{ax} - 1 \right]$

Hvis a eller b ikke fins, har f ingen skråasymptote.

Bevis Fra ② får vi at hvis grensen for b fins, så er $y = ax + b$ en skråasymptote.

Omvendt, anta at $y = ax + b$ er en skråasymptote for $f(x)$. Da får vi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\overset{\to 0}{f(x) - (ax+b)}}{x} + a + \overset{\to 0}{\frac{b}{x}} \right] = a$$

Deretter får vi:

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - ax \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{\{ f(x) - (ax+b) \}}_{\to 0} + b \right] = b. \ \square$$

eks. $f(x) = 5x\,e^{7/x}$, finne skråasymptote $y = ax + b$

Løsn.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 5\,e^{\overset{\to 0}{7/x}} = 5$$

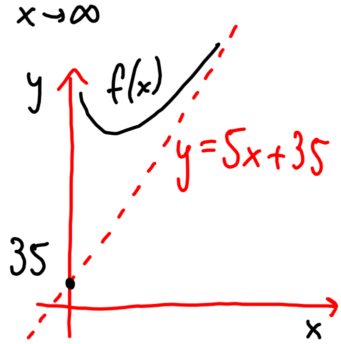
$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to\infty} \left[5x e^{7/x} - 5x\right]$$

$$\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to\infty} 5x\Big(\underbrace{e^{\overset{\to 0}{7/x}}}_{\to 1} - 1\Big) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{7/x} - 1}{\frac{1}{5x}}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{7/x}\cdot\left(\frac{-7}{\cancel{x^2}}\right)}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-1}{\cancel{x^2}}\right)} = 7\cdot 5 \lim_{x\to\infty} e^{\overset{\to 0}{7/x}}$$

$$= 7\cdot 5\cdot e^{0} = 35$$

Skråasymptote: $\underline{\underline{y = 5x + 35}}$



eks. 2

$$f(x) = \frac{7x^3 + 6x^2 + 5x + 7}{x^2 - 1}$$

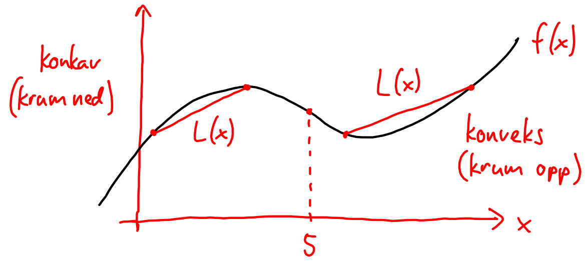
$$= (7x^3 + 6x^2 + 5x + 7) : (x^2 - 1) = 7x + 6 + \frac{12x + 13}{x^2 - 1}$$

0 når $x \to \infty$

$$\begin{array}{l} 7x^3 - 7x \\ \hline \quad 6x^2 + 12x + 7 \\ \quad 6x^2 - 6 \\ \hline \quad\quad 12x + 13 \end{array}$$

Skråasymptote: $y = \underline{\underline{7x + 6}}$ (metoden "vår" virker også)

Konkave og konvekse funksjoner



$x = 5$ vendepunkt

f kalles <u>konkav</u> på et intervall $I \subseteq D_f$ hvis hver gang vi velger to punkter a og b fra I, så vil den lineære funksjonen $L(x)$ gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ oppfylle $L(x) \le f(x)$ for alle $x \in (a,b)$.
Hvis $L(x) < f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, kalles f <u>strengt konkav</u> på I.

Begrepene <u>konveks</u> og <u>strengt konveks</u> defineres ved å bytte $\le$ med $\ge$ og $<$ med $>$.

Definisjonene av konkav og konveks forutsetter ikke at $f''(x)$ fins. Men <u>hvis</u> den fins, har vi denne sammenhengen:

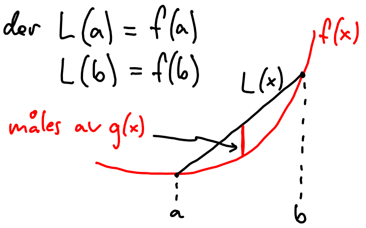
<u>Teorem</u> Anta at f' er kontinuerlig på intervallet I.
- Hvis $f''(x) > 0$ på det indre av I, så er f strengt konveks på I
- Hvis $f''(x) < 0$ ——— " ——— " ——— konkav —"—

<u>Bevis</u> Anta $f''(x) > 0$ på det indre av I. ($f''(x) < 0$: tilsv.)

La $g(x) = f(x) - L(x)$ der $L(a) = f(a)$
$L(b) = f(b)$

Da får vi

$$g'(x) = f'(x) - L'(x)$$
$$g''(x) = f''(x) - 0$$

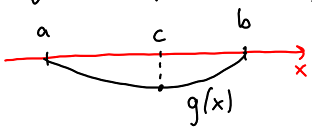


Så $g''(x) = f''(x) > 0$ på (a,b)

Dvs. $g'(x)$ er strengt voksende på $[a,b]$.

Videre $g(a) = g(b) = 0$, så ved Rolles teorem fins c mellom a og b slik at $g'(c) = 0$

Ergo må $g'(x) < 0$ på (a,c) og $g'(x) > 0$ på (c,b).



$g'(c) = 0$

Dermed $g(x) < 0$ for alle $x \in (a,b)$.
Altså $L(x) > f(x)$ —— " ——
Ergo er f strengt konveks på I. □