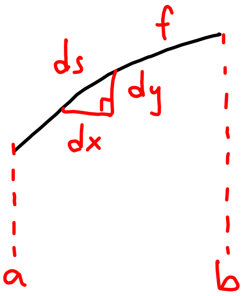
Huskeregel for graflengde



Pytagoras: $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$= \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \cdot dx^2$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Ergo: $s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Delvis integrasjon (9.1)

Hvis $F(x)$ og $G(x)$ er funksjoner med kontinuerlige deriverte, så er

$$\int F(x)G'(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)\,dx$$

Bevis Deriverer på begge sider:

$$F(x)G'(x) = [F(x)G(x)]' - F'(x)G(x)$$

Dette er produktregelen for derivasjon. $\square$

eks.

$$\int x e^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx$$

Delvis $F(x) = x$ $G'(x) = e^{-x}$
$F'(x) = 1$ $G(x) = -e^{-x}$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= \underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

I - metoden (variant av delvis integrasjon)

eks. $\overset{I}{\int e^x \sin x \, dx} = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x) = e^x & G'(x) = \sin x \\ F'(x) = e^x & G(x) = -\cos x \end{array}}$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

$$= -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \overset{I}{\int e^x \sin x \, dx} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(x) = e^x & G'(x) = \cos x \\ F'(x) = e^x & G(x) = \sin x \end{array}}$$

Kaller vi det opprinnelige integralet I, har vi nå

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$I = -\tfrac{1}{2} e^x \cos x + \tfrac{1}{2} e^x \sin x.$$

Altså: $\int e^x \sin x \, dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C}}$

"Baklengs" substitusjon (setning 9.2.3)

begrunner at vi også kan regne slik ved substitusjon:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = u(x) \quad \text{gir} \quad x = h(u) \\ \dfrac{dx}{du} = h'(u), \quad dx = h'(u)\,du \end{array}}$$

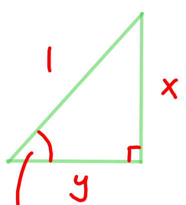
eks. $\int \arcsin x \, dx = \int u \cdot \cos u \, du$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \arcsin x \quad \text{gir} \quad x = \sin u \\ \dfrac{dx}{du} = \cos u, \quad dx = \cos u \, du \end{array}}$$

$= u \sin u - \int 1 \cdot \sin u \, du = u \sin u + \cos u + C$

$$\boxed{\begin{array}{ll} F(u) = u & G'(u) = \cos u \\ F'(u) = 1 & G(u) = \sin u \end{array}}$$

$= (\arcsin x) \cdot x + \cos(\arcsin x) + C$



$v = \arcsin x$ fordi $x = \sin v$

$\cos v = \frac{y}{1} = \sqrt{1 - x^2}$

Så $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

Sjekk: $\frac{d}{dx}\left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) = 1 \cdot \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$

$= \underline{\arcsin x}$ Ok!

eks. $\int \sqrt[3]{x+1}\,dx = \int u \cdot 3u^2\,du = 3\int u^3\,du$

$u = \sqrt[3]{x+1}$ gir $u^3 = x+1$
$x = u^3 - 1$

$\frac{dx}{du} = 3u^2$, $dx = 3u^2\,du$

$= \frac{3}{4}u^4 + C$

$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^4 + C$

$= \underline{\underline{\frac{3}{4}(x+1)^{4/3} + C}}$

eks. $\int \sqrt{\frac{\arccos^3 x}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{(\arccos x)^3}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$u = \arccos x$, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $dx = -\sqrt{1-x^2}\,du$

$= -\int \sqrt{u^3}\,du$

$= -\int (u^3)^{\frac{1}{2}}\,du$

$= -\int u^{3/2}\,du$

$= -\frac{1}{\frac{5}{2}}u^{5/2} + C$

$= -\frac{1\cdot\frac{2}{5}}{\cancel{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}}}u^{5/2} + C = -\frac{2}{5}u^{5/2} + C$

$= \underline{\underline{-\frac{2}{5}(\arccos x)^{5/2} + C}}$

$\boxed{\text{Kvadrat - teknikken}}$ (seksjon 9.3)

La $n \geq 1$ være et helt tall. Integralet

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$ der $ax^2+bx+c=0$ ikke har reelle løsninger

kan løses ved en teknikk som vi kaller "kvadrat-teknikken":

1. Bruk "smugling" til å skrive integralet på formen

$$C_1 \cdot \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx + C_2 \cdot \int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

2. Venstre integral løses ved å substituere $u = ax^2+bx+c$.
3. Høyre integral: Skriv om til formen

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du$$

ved å utvide til fullstendig kvadrat, dvs. skrive

$$ax^2+bx+c = a(x+K)^2 + M$$

og deretter substituere. Bruk så rekursjonsformelen (bevis s. 504)

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^n}\,du = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}}\,du$$

inntil du ender opp med integralet

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \underline{\underline{\arctan u + C}}$$

(slå så sammen de to integralene)

eks. Skal finne $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

Sjekk: $x^2+x+1=0$ gir $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4}}{2}$ nix

1 $\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{3}{2}}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

2 $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}\,du$

$\boxed{u = x^2+x+1 \quad \frac{du}{dx} = 2x+1 \quad du = (2x+1)dx}$

$$= \frac{1}{(-1)}u^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

3 Høyre integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{\left[\frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}\right]^2}$$

Utvidelse til fullstendig kvadrat:

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left\{1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{3}{4}\left\{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}$$

$$= \int \frac{(\sqrt{3}/2)\,du}{\left[\frac{3}{4}\{1+u^2\}\right]^2}$$

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad \frac{du}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx, \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$$

$$= \frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

rek. formel $n=2$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1+u^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}du\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(1+u^2)}+\frac{1}{2}\arctan u\right]+C$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}+\frac{1}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\right]+C$$

Delbrøksoppspalting (9.3)

kan brukes til å integrere alle funksjoner på formen

$\frac{p(x)}{q(x)}$ der p og q er polynomer

① Bruk polynomdivisjon inntil $p(x)$ har lavere grad enn $q(x)$

② Faktoriser $q(x)$ i faktorer

$$(x-r)^n \quad \text{og} \quad (ax^2+bx+c)^n$$

der $ax^2+bx+c=0$ ikke har reelle løsninger.

③ Hver faktor $(x-r)^n$ gir leddene

$$\frac{a_1}{x-r} + \frac{a_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(x-r)^n}$$

og hver faktor $(ax^2+bx+c)^n$ gir leddene

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Sett $\frac{p(x)}{q(x)}$ lik summen av alle ledd. Gang så opp $q(x)$, og finn konstantene. Metoder:

- sammenlikne koeffisienter (gir likn. system)
- sette inn lure x-verdier.

eks. 1 $\int \frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)\cdot(x-1)}\,dx$

1. grad $p = 2$, grad $q = 3$, dvs. ok.
2. $x^2-1 = 0$ gir $x = \pm 1$. Så $x^2-1 = (x-1)(x+1)$
3. Vi får

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)\cdot(x-1)^2} = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x-1)} + \frac{a_3}{(x-1)^2}$$

Ganger opp nevneren:

$$3x^2-3x-2 = a_1(x-1)^2 + a_2(x+1)(x-1) + a_3(x+1) \quad (*)$$

Lure x-verdier:

$x=1$ gir $3\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = 0 + 0 + a_3\cdot 2$

$-2 = a_3\cdot 2$, dvs. $a_3 = -1$

$x=-1$ gir $3\cdot 1 + 3 - 2 = a_1(-1-1)^2 + 0 + 0$

$4 = 4a_1$ dvs. $a_1 = 1$

Setter du dette inn og ganger ut parentesene i (*), får du

$$3x^2-3x\underline{-2} = x^2-2x+\cancel{1}+a_2x^2\underline{-a_2}-x-\cancel{1}$$

Ser at $a_2 = 2$. Altså

$$\frac{3x^2-3x-2}{(x^2-1)\cdot(x-1)} = \underline{\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{(-1)}{(x-1)^2}}$$

osv. (integrer)

eks. 2 $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3}\,dx$

1. Grad teller 3, grad nevner 6, altså ok.
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$ har ingen reelle løsn.
3. $$\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2x + 2)^3}$$

Ganger opp:

$$x^3 + 3x^2 + 4x = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)^2 + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2) + (Ex + F)$$

Her må $A = 0$, fordi A blir stående alene foran x^5 til høyre.
Så må $B = 0$, fordi B da blir stående alene foran x^4 — " —.
Gang så ut resten av leddene på høyre side, og sammenlikne koeffisienter (likningssystem).