Løsningsforslag noen oppgaver

Fredrik Meyer

September 30, 2016

1 5.1.5G

Vi skal vise at funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ er kontinuerlig i punktet $x = 4$.

Så anta vi er gitt en $\epsilon > 0$. Vi må vise at om vi velger $\delta > 0$ liten nok så kan vi få funksjonsforskjellen $|f(x) - f(4)| < \epsilon$ når $|x - 4| < \delta$.

Målet er å begrense ulikheten, og uttrykke den kun som en funksjon av δ. Det vil si at vi har lyst å ha funksjonsforskjellen på venstre siden av ulikheten, og et uttrykk som bare avhenger av δ på høyresiden.

Vi har at

$$|f(x) - f(4)| = |\sqrt{x} \ - 2| = |\sqrt{x} - \sqrt{4}|.$$

Dette ligner litt på en kjent faktorisering. Vi har nemlig at

$$|(x - 4)| = |\sqrt{x} - \sqrt{4}||\sqrt{x} + \sqrt{4}| < \delta.$$

Stokker vi om, får vi at

$$|\sqrt{x} - 2| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + 2}.$$

Denne ulikheten er et steg nærmere det vi har lyst, nemlig en høyreside som kun avhenger av δ. Siden vi har lyst å finne en øvre begrensning for uttrykket, så lurer vi på maksimumsverdien til høyresiden er. Den oppnår maksimumsverdien når $\sqrt{x}+2$ er minst mulig. Hva er det minste $\sqrt{x}+2$ kan være? Siden vi vet at $|x - 4| < \delta$, så er x i intervallet $(4 - \delta, 4 + \delta)$. Vi kan anta at $\delta < 1$ (siden det er vi som har kontroll på δ). Dermed er x i intervallet $(3, 5)$. Dermed er $\sqrt{x} + 2$ i intervallet $(\sqrt{3}+2, \sqrt{5}+2)$. Dette er circa $(3.73, 4.23)$. Siden det minste $\sqrt{x}+2$ kan være, er $\sqrt{3} + 2$, så kan vi skrive ulikheten

$$|f(x) - f(4)| < \frac{\delta}{\sqrt{x} + 2} \ < \frac{\delta}{\sqrt{3} + 2}.$$

Dermed har vi en ulikhet som kun avhenger av δ på høyresiden. Dermed: om vi velger δ til å være minimumsverdien av 1 og $\epsilon/(\sqrt{3} + 2)$, så vil alltid $|f(x) - f(4)| < \epsilon$.

Dermed er $f(x) = \sqrt{x}$ kontinuerlig i $x = 4$.

2 4.3.13

Vi skal finne eksempler på følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ slik at begge går mot uendelig, men slik at $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = -\infty$, eller $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n$ er et endelig tall.

For det første eksemplet, kan vi tenke oss at vi skal finne to følger som begge går mot uendelig, men der den ene vokser mye mer enn den andre. Et eksempel er $a_n = n^2$ og $b_n = n$. Da vil $a_n - b_n = n^2 - n$ også gå mot uendelig.

For det neste, kan vi enkelt bare bytte om på a_n og b_n. Sett $a_n = n$ og $b_n = n^2$.

For det tredje eksemplet ønsker vi to følger som begge går mot uendelig, men hvor differanser er et endelig tall. Dette kan vi intuitivt tenke på som to følger som begge vokser like raskt. Velg for eksempel $a_n = n$ og $b_n = n + 10$. Da er $a_n - b_n = 10$, så grensen er 10, siden differansen er en konstant følge.