Løsningsforslag noen oppgaver

Fredrik Meyer

9. september 2016

Oppgave 1 (3.3.7)**.** Bruk de Moivre's formel til å uttryke $\sin 4\theta$ og $\cos 4\theta$ ved hjelp av $\sin\theta$ og $\cos\theta$. ■

Løsning 1. Husk at de Moivre's formel sier at

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Vi setter $n = 4$, og får

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta).$$

Strategien er nå å gange ut parentesene og deretter sammenligne realdeler og imaginærdeler. En grei strategi er å først regne ut $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$, og deretter gange dette med seg selv.

Vi får

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\sin\theta). \tag{1}$$

Vi ganger dette med seg selv og får:

$$\begin{aligned}((\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\sin\theta))^2 &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2 - 4\cos\theta^2\sin^2\theta + 2i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta) \\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta)\end{aligned}$$

Sammenligner vi realdeler og imaginærdeler i (1), ser vi at

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta,$$

og

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta.$$

♡

Oppgave 2 (3.3.8)**.** Regn ut $(1+i)^{804}$ og $(\sqrt{3}-1)^{173}$. ■

Løsning 2. Her lønner det seg å skrive om på polarform. Vi har at

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

og

$$-1+\sqrt{3}=2e^{-\pi i/6}.$$

Dermed er

$$(1+i)^{804}=\sqrt{2}^{804}\left(e^{i\pi/4}\right)^{804}=2^{402}e^{201\pi i}=-2^{402},$$

siden $e^{\pi n}$ er -1 om n er odde.

Den andre er hakket verre. Her har vi at

$$(\sqrt{3}-i)^{173}=2^{173}\ e^{\pi 173i/6}.$$

Her er trikset å bruke delealgoritmen til å skrive $173=28\cdot 6+5$. Dermed er

$$2^{173}\ e^{\pi 173i/6}=2^{173}e^{\pi(28+5/6)i}=2^{173}e^{\pi 5i/6}.$$

Dette er lik

$$2^{173}\left(-\frac{sqrt3}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2^{172}(-\sqrt{3}+i).$$

♡