· I morgen: Tekna krasjkurs (gjennomgang av tidligere midtveiser)
· Onsdag: Snuble orakel m/ Karoline (midtveis 2015)

5.4.1 B)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 + \sqrt{x} + e^{x^2}}{7 + \sin(\sqrt{x})} = \frac{0+0+1}{7} = \frac{1}{7}$$

Husk
$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g}$$
$$\lim(fg) = \lim f \cdot \lim g$$
(osv)

(Går det an å sette inn null?) Ja

5.4.2 B) V.a. $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ v/ definisjonen.

Husk Vi sier at $\lim_{x \to 3} f(x) = a$ hvis det for alle $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - a| < \varepsilon$ når $0 < |x - a| < \varepsilon$

$$|x^2 - 9| = |x-3||x+3| < \delta |x+3| < \delta(\delta + 6)$$

Vil ha denne minst mulig

$$|x+3| = |x-3+3+3| \leq |x-3| + 6 < \delta + 6$$

$< 7\delta < \varepsilon$. (Om vi antar $\delta < 1$)

Hvis vi velger $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$ vil funksjonsforskjellen være $< \varepsilon$.

5.4.3 a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{7x^2 + 4x^4}{3x^3 - 2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(7 + 4x^2)}{x^2(3x - 2)} = \lim_{x \to 0} \frac{7 + 4x^2}{3x - 2} = \frac{7}{-2} = -$$

x er aldri lik null, så vi kan dele

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{1 + 3y} - 1}{y}$$

Sett $x = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{x}$

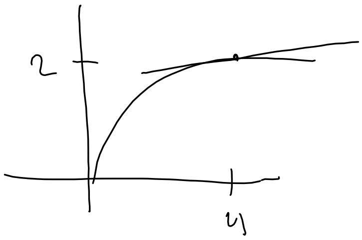
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{(\sqrt{1+3y} - 1)(\sqrt{1+3y} + 1)}{y(\sqrt{1+3y} + 1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{1} + 3y \cancel{- 1}}{y(\sqrt{1+3y} + 1)}$$

$$= \lim \frac{3}{\sqrt{1+3y} + 1} = \frac{3}{2}.$$

okt 7-08:07

d) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}$



$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

Bevis

$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

s 261

6.1.3 Husk $f'(x) = f(x) \cdot D[\ln|f(x)|]$

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos^4 x \cdot e^x$

$D[\ln f(x)] = D[2\ln x + 4\ln\cos x + x]$

$= \frac{2}{x} + 4\frac{-\sin x}{\cos x} + 1$

$= \frac{2}{x} - 4\tan x + 1$

Så $f'(x) = x^2 \cos^4 x \, e^x \left(\frac{2}{x} - 4\tan x + 1\right)$. ✓

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln a^b = b\ln a$

6.1.10 $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Vis fra definisjonen.

Def 1 $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

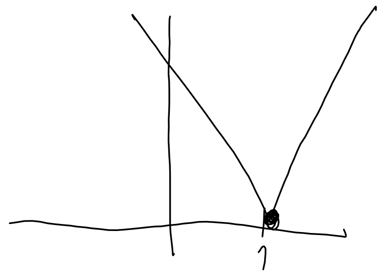
Def 2 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(de er samme: sette $x = a + h$, $h = x - a$)

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{a}}}}.$$

6.1.11 a a) $f(x) = |x-1|$ V.a. $f'(1)$ ikke eksisterer.



Husk at $f'(1)$ eksisterer hvis grenseverdien $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ eksisterer.

Nærmer oss 1 ovenfra og nedenfra:

Fjerner $|\cdot|$-tegnet siden $(x-1) > 0$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

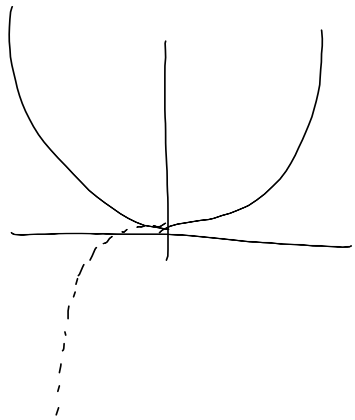
Husk $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

Så $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ kan ikke eksistere, siden de ensidige grenseverdiene er forskjellige.

6.1.12

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x<0 \\ x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$



Bruk def. av derivert til å regne ut $f'(0)$.

Må regne ut $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$

Regner ut grenseverdien når $x \to 0^-$ og $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = \underline{\underline{0}}.$$

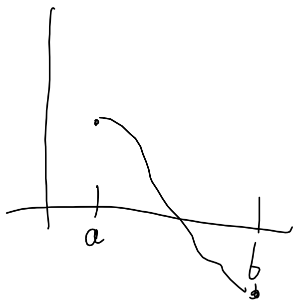
Grenseverdiene er like, så den deriverte er veldefinert. og lik 0. ✓

(merk: én gang deriverbar, men ikke to).

6.2.2 a Vis at funksjonen har nøyaktig ett nullpunkt i intervallet.

a) $f(x) = \cos x - x$ i intervallet $[0, \frac{\pi}{4}]$

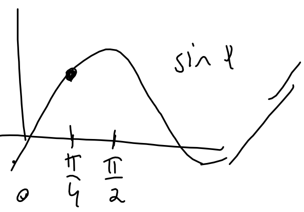
Merk Korollar 6.2.5 Hvis $f'(x) \geq 0$ på hele intervallet, så er f voksende.
$(x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$



Sjekker $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0$

Forskjellig fortegn! Så eksisterer nullpunkt!

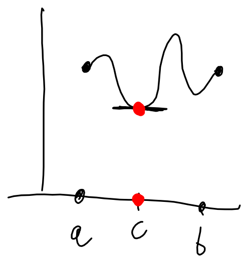


Deriverer: $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$ for alle $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

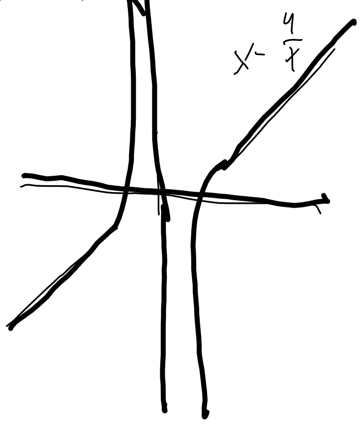
Funksjonen er strengt synkende og kan derfor ha maks. ett nullpunkt. Så den har nøyaktig ett nullpunkt. $\square$

6.2.5

Rolles thm Hvis f er kont. og deriverbar i (a,b) og $f(a)=f(b)$ så finnes $c \in (a,b)$ slik at $f'(c)=0$.



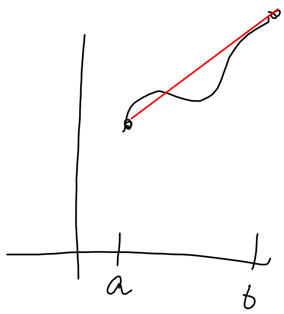
$$f(x) = x - \frac{4}{x} \qquad \underset{3}{\underset{\parallel}{f(-1)}} = \underset{3}{\underset{\parallel}{f(4)}} \qquad f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2} > 0$$



Men det finnes ingen c slik at $f'(c)=0$.

Problem: Ikke kontinuerlig i 0 (ikke definert der), så første betingelse i Rolle er ikke oppfylt.

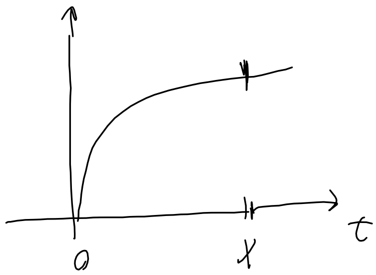
6.2.8 Anta $x > -1$.
V.a. det alltid finnes et tall c mellom 0 og x s.a.
$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$
Vis at $\ln(1+x) \leq x$.



Minne om MVS: f kontinuerlig i $[a,b]$:
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$
for en $c \in (a,b)$.

gjennomsnittlig stigningstall i intervallet

Setter $f(t) = \ln(1+t)$ på intervallet $[0,x]$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$
en slik c eksisterer v/ middelverdisetningen.



Har at $f'(t) = \frac{1}{1+t}$.

Så uttrykket sier
$$\frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{1}{1+c}$$
$$\iff \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \iff \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}.$$

Dermed
$$\ln(1+x) = \frac{x}{\underbrace{1+c}_{c>0 \text{ så } 1+c>1}} \leq x.$$