6.3.1 f)

$\frac{0}{0}$ - uttrykk

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}$$

gange m/ x

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2x(x-1)}$$

samme

$1 - x = -1\cdot(x-1)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2} \checkmark$$

kan finne ved å sette $x = 1$.

1^∞ - uttrykk

6.3.3 e)

$$A = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{går mot } 0}\right)^x$$

„Triks"

$$\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{1/x}}$$

Tar $\ln(\cdot)$ på begge sider:

ps: kont. funksjon: $f(\lim x) = \lim f(x)$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{0}{0}$ - uttrykk

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{\frac{-1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$$

$\left[\sin\frac{1}{x}\right]' = \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\sin\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

Så $\ln A = 1$

$\Rightarrow A = e^1 = \underline{\underline{e}}$ svaret

6.3.9

$$A = \lim_{x\to 0} \left(e^x + \sin x\right)^{\frac{1}{x}} \qquad 1^\infty \text{ - uttrykk}$$

Tar ln på begge sider.

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln\left(e^x + \sin x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(e^x + \sin x\right)$$

$\frac{0}{0}$ uttrykk!

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(e^x + \sin x\right)}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e^x + \sin x}\left(e^x + \cos x\right)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x} = \frac{1+1}{1+0} = 2$$

Siden $\ln A = 2 \Rightarrow A = e^2.$

6.3.13

$$A = \lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}$$

$0 \cdot \infty$ - uttrykk

Ta ln på begge sider:

$$\ln\left(x^{\sin x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \ln x$$

$$\ln A = \lim_{x \to 0^+}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-1}{(\sin x)^2} \cos x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$\frac{-\infty}{\infty}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\hat{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{\cos x \cdot x} = -\underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x}}_{0}$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

Så $\ln A = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A = 1}}$

6.3.17 Finn tallet a slik at

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$$

($e \approx 2.718281828459045\ldots$ 1845 Rettvinklet)

Ligning der vi vil finne a.

Tar ln på begge sider:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right)^x = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

0 · 0 - ubestemt

$$= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{ax+1}{ax}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(ax+1)-\ln(ax)}{\frac{1}{x}} \overset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a}{ax+1}+\frac{1}{ax}\cdot a}{+\frac{1}{x^2}}$$

$\cdot x^2$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-ax^2}{ax+1}+\frac{ax^2}{ax} = \lim_{x\to\infty}\frac{(-ax^2)(ax)+(ax^2)(ax+1)}{(ax+1)(ax)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{-a^2x^3}+\cancel{a^2x^3}+ax^2}{a^2x^2+ax} \;\frac{1}{ax}\; = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{ax+1}$$

$$\overset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

Så siden $\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$ ✓

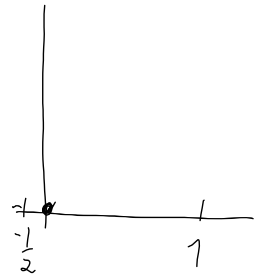
6.4.1 e) Finn kritiske punkter til f og bestem max og min-verdier.

$$f(x) = x + 3x^{2/3} \quad \text{på intervallet } \left[-\tfrac{1}{2}, 1\right].$$

$$= x^{\frac{3}{3}} + 3x^{2/3}$$

$$= x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3x^{2/3}$$

$$= x^{2/3}\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)$$



Finner først nullpunkter $x^{2/3}\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right) = 0$

$x^{2/3} = 0$ eller $x^{\frac{1}{3}} + 3 = 0$ $\quad x^{\frac{1}{3}} = -3$ $\quad \frac{3}{3} - 1 = \frac{3}{3} - \frac{3}{3}$

$\Leftrightarrow x = 0$ $\qquad x = (-3)^3 < -\frac{1}{2}$ $\qquad = \frac{-1}{3}$

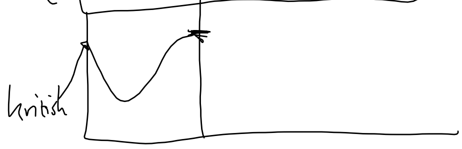
Så f har bare ett nullpunkt i intervallet.

$$f(x) = x + 3x^{\frac{2}{3}} \qquad f'(x) = 1 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 0$$

Kritiske punkter er der

Et punkt $c \in [a,b]$ er **kritisk pkt** hvis en av følgende er oppfylt + lokale maks/min
1. endepunkt
2. $f'(c) = 0$
3. f ikke deriverbar i c.



Finner først nullpunktene til $f'(x)$:

$$1 + 2x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

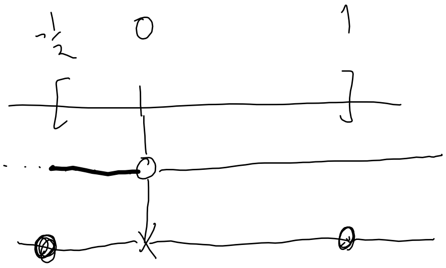
$$\Rightarrow x^{-1} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x = -8$$

Men denne er langt utenfor intervallet.

Tegner fortegnslinje



$$f'(x) = 1 + 2x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1 + 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} > 0$$

(plott i WolframA. gir mening)

Kritiske punkter: $-\frac{1}{2}, 0, 1.$

lokalt min, lokale maks.

Endepunktene til $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ er kritiske pkter, siden f' er pos. der. (så de er lokale maksima)

min $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}$

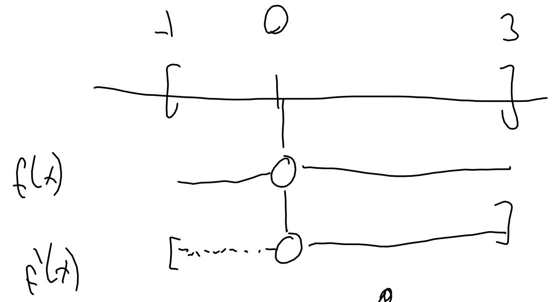
max $\quad f(1) = 1 + 3 \cdot 1^{2/3} = \underline{\underline{4}}$

(ser ut helt riktig løsn)

okt 21-09:14

6.4.1 d) $f(x) = x^2 e^x$ $[-1,3]$

Har nullpkt når $x=0$



Og deriver

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x$$
$$= e^x \underbrace{(2x + x^2)}\ = 0$$

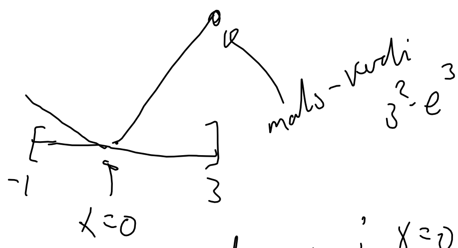
$\neq 0$

null når $2x + x^2 = 0$ null når

$x(2+x) = 0$

$x=0$ eller $x = -2$

↑ ikke i intervallet



Ser at f har lokalt min i $x=0$, men dette er også et globalt minimum.

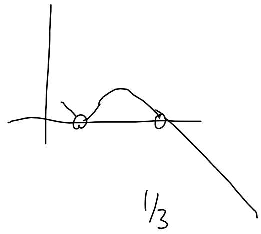
Punktene $x=-1$ og $x=3$ er også kritiske: de er lokale maksima (siden alle verdier i nærheten er mindre).

Globalt maks er når $x=3$.

✓

6.5.13 $f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}$

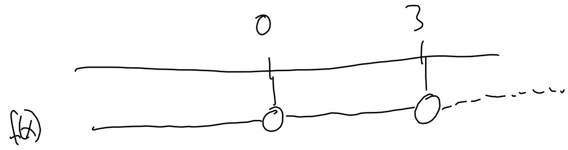
a) Finn nullpkter og når $f > 0$ og $f < 0$.



Finner først nullpunkter:

$$f(x) = 0 \iff 3x^2 - x^3 = 0$$
$$\iff x^2(3 - x) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ eller } x = 3$$

$$f(1) = (3 - 1)^{1/3} = 2^{1/3} > 0$$



Finner ----- = ___ v/ å sette inn og ___ verdier mellom nullpunktene.

b) Finn når f vokser/synker og lokale/globale ekstremalpunkter.

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{1/3}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - x^3)^{-2/3} \cdot (6x - 3x^2)$$
$$= \frac{6x - 3x^2}{3(3x^2 - x^3)^{2/3}} = \frac{2x - x^2}{(3x^2 - x^3)^{2/3}}$$

Finner nullpkter til f': $2x - x^2 = 0 \iff x(2 - x) = 0$
$\iff x = 0 \quad x = 2$

Så $f'(2) = 0$ ✓ Men hva m/ $x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2x - x^2}{(3x^2 - x^3)^{2/3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x(2 - x)}{}$$

(må ta grenseverdi for å finne ut om $f'(0) = 0$)