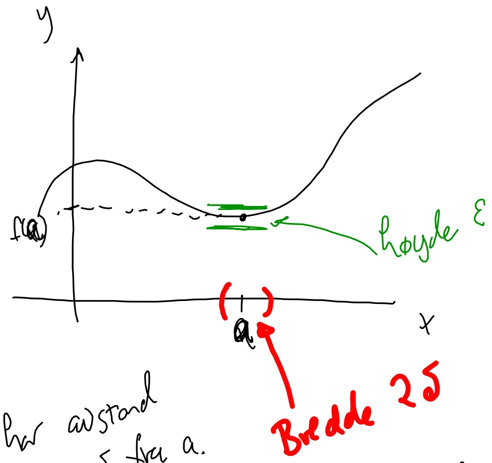
Plenum 30/9

$\exists$

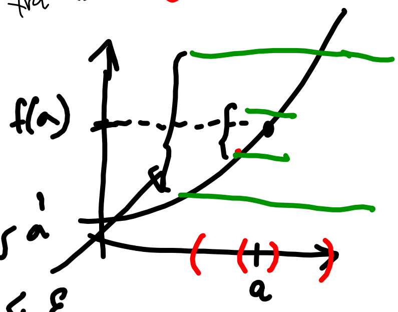
Kontinuitet

Gitt positive $\varepsilon > 0$. Da er f kontinuerlig i a hvis det eksisterer $\delta > 0$ slik at
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{når} \quad |x-a| < \delta.$$

x har avstand mindre enn δ fra a.



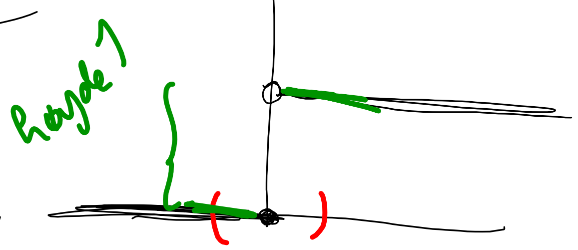
Ønsker å få den grønne boksen til å ha høyde < ε ved å minke det røde intervallet.



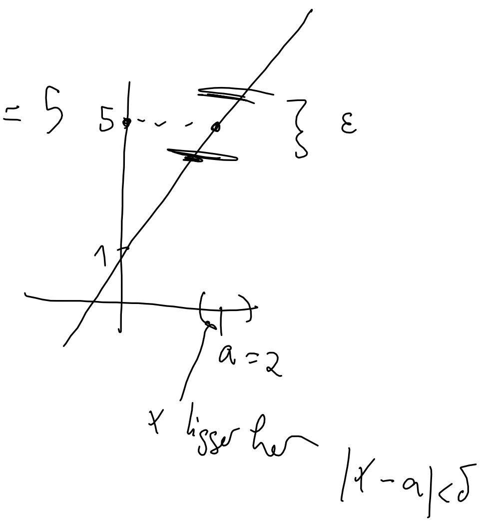
Ønsker å få høyde < ε.

Ikke-kontinuerlig funksjon

Uansett hvor lite vi velger det røde intervallet, vil den grønne boksen ha høyde 1! Så ikke-kont.



5.1.5 Vis at f er kontinuerlig i a.

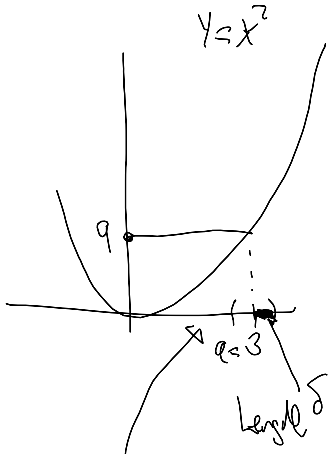


a) $f(x) = 2x+1$; $a = 2$. $f(a) = 5$

$$|f(x) - f(a)| = |2x+1-5|$$
$$= |2x-4|$$
$$= 2|x-2| < 2\delta$$

Vil ha $\delta < \varepsilon$.

Setter $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, og får $|f(x) - f(2)| < 2\delta = \varepsilon$.



b) $f(x) = x^2$ $a = 3$.

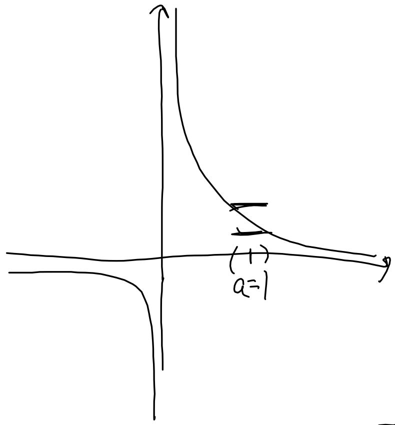
Har kontroll over $|x-3| < \delta$. Vil ha $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$.

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |x-3||x+3|$$
$$< \delta|x+3|$$
$$< \delta\underbrace{(6+\delta)}_{<7 \text{ siden vi kan velge } \delta<1}$$
$$< 7\delta$$

Det største x kan være er $3+\delta$ og $3-\delta$. Så $|x+3|$ er mindre enn $3+\delta+3 = 6+\delta$

Så: setter vi $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$, får vi at $|f(x) - f(3)| < \varepsilon$. ✓
(Egentlig $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\}$.)

e) $f(x) = \frac{1}{x}$ i $a = 1$.



Gitt $\varepsilon > 0$ og $|x-1| < \delta$.

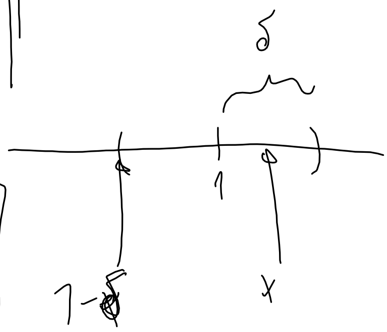
vil ha

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{|x-1|}{|x|} < \frac{\delta}{|x|}$$

$$\left|\frac{1-x}{x}\right| = \frac{|1-x|}{|x|} = \frac{|x-1|}{|x|} < \frac{\delta}{1-\delta} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{Må anta } \delta < 1.}$



Løser for δ: $\frac{\delta}{1-\delta} = \varepsilon \iff \delta + \varepsilon\delta = \varepsilon \iff \delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

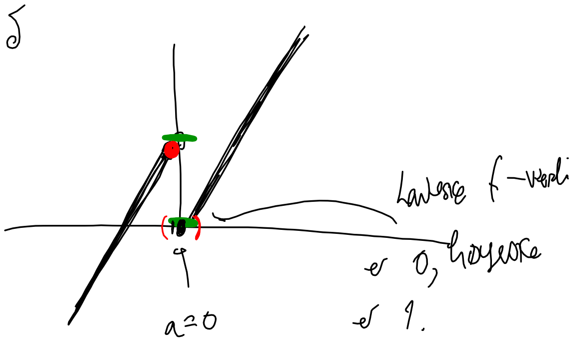
Så setter vi $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, er $\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$ når $|x-1| < \delta$. ✓

5.1.6 Ikke kont. i $a=0$.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Må vise at det eksisterer en $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ så finnes x med $|x-a| < \delta$ men $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.



$\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vil vise at $|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$ for en x med $|x - 0| < \delta$.

$|f(x) - \underset{0}{f(0)}| = |f(x)|$ Velger vi $x<0$ men også $|x| < \delta$

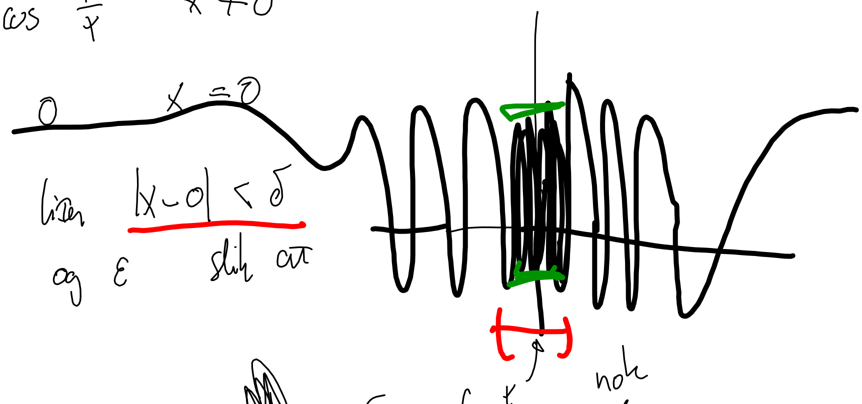
Så er $|f(x)| = |x+1|$ siden $x<0$ Velg x veldig nær 0, men negativ.

Da blir $\underset{|f(x)|}{|x+1|} > \frac{1}{2}$.

$\square$

5.1.6 B)

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Vil v.a. uansett hvor liten $|x-0| < \delta$, så kan vi finne x og ε slik at $|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$.

Sett $x_n = \frac{1}{\pi n}$. Da er $x_n < \delta$ for stor nok n.

$$\boxed{\frac{1}{\pi n} < \delta \Rightarrow n > \frac{1}{\pi \delta}}$$

Da er $\left| f(x_n) - f(0) \right| = \left| \cos(\pi n) \right| = 1$

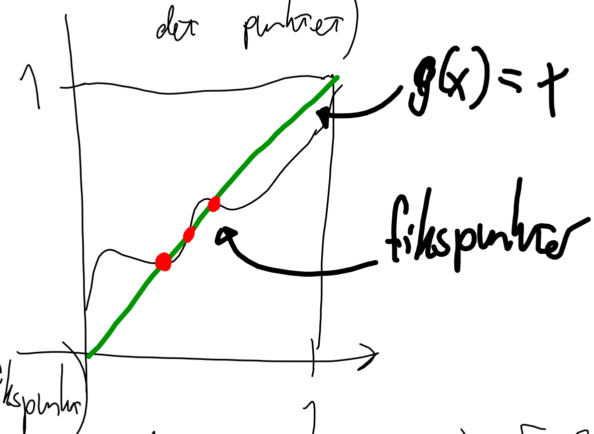
Fiks hvis $\varepsilon = \frac{1}{2}$, så er $\left| |f(x)| - f(0) \right| \geq \frac{1}{2}$ for $x = x_n$.

(uansett hvor liten $|x-0| < \delta$, så vil $|f(x) - f(0)| \geq \frac{1}{2}$ så lenge $x = \frac{1}{\pi n}$ (stor n))

5.2.8 Gitt en kontinuerlig funksjon $f:[0,1] \to [0,1]$

Vis at eksisterer fikspunkt for f. (Et fikspkt er punkt a slik at $f(a)=a$ i det punktet)

(Skjæringssetningen: Gitt $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ med $f(0) \leq 0$ og $f(1) \geq 0$, så finnes $c \in [0,1]$ m/ $f(c)=0$.)



Lager hjelpefunksjon $h(x) = f(x) - x$.

(hvis $h(a)=0$, så er $f(a)=a$, altså a fikspunkt)

Ser på $h(0) = f(0) \geq 0$. Og $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ siden $f(1) \in [0,1]$.

Vi skjæringssetningen må det finnes $c \in [0,1]$ slik at $h(c) = 0$. Altså $f(c) = c$. ← fikspunkt.