Fredrik fredrme@math.uio.no
algebraisk geometri :) folk.uio.no/fredrme

3.16 Løs

$$\begin{cases} z + w = 2i & (1) \\ z - w = 3 + i & (2) \end{cases}$$

Legger sammen $(z + w) + (z - w) = 2i + (3 + i)$

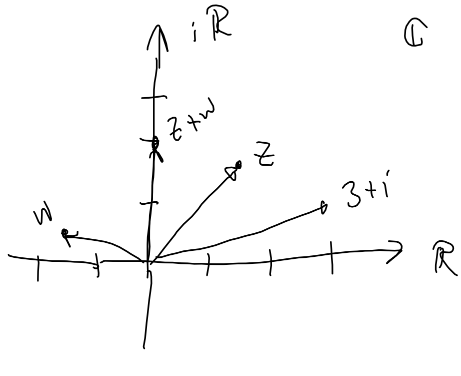
$$2z = 3 + 3i$$

$$z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} i \quad \checkmark$$

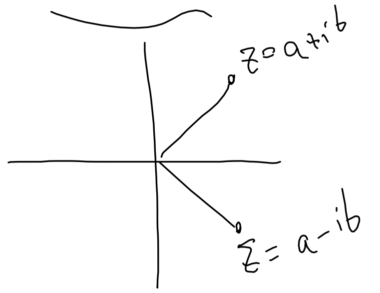
Fra (1) får vi at

$$w = 2i - z = 2i - \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i\right)$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \quad \checkmark$$



3.1.9 Vis at $\bar{z}w$ og $z\bar{w}$ er konjugerte.



Symbolsk $\overline{\bar{z}w} = z\bar{w}$ (*)

Skriver $z = a + ib$ og $w = x + iy$
(og $\bar{w} = x - iy$)

Da er $\bar{z} = a - ib$. Så

$$\bar{z}w = (a - ib)(x + iy)$$
$$= (ax + by) + i(ay - bx)$$

$-ib \cdot iy$
$= by$

$i^2 = -1$

Så $\overline{\bar{z}w} = (ax + by) + i(bx - ay)$

Regner ut høyresiden av (*):

$$z\bar{w} = (a + ib)(x - iy)$$
$$= (ax + by) + i(bx - ay)$$

Så $\overline{\bar{z}w} = z\bar{w}$.

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

3.2.10 Skisser:

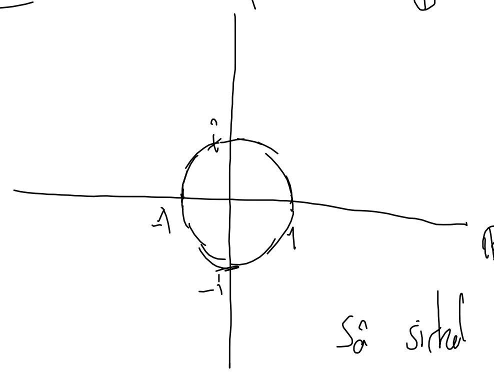
a) $\{z \mid |z| = 1\}$

B) $\{z \mid |z-1| < 2\}$

c) $\{z \mid |z-(i+1)| \geq \frac{1}{2}\}$

d) $\{z \mid |z-2| < |z-i+2|\}$

a)

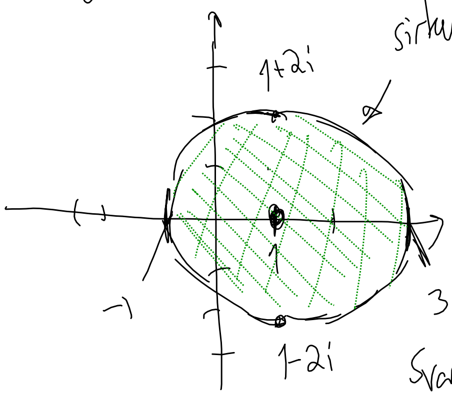


$\{z \mid |z| = 1\}$

"Alle z slik at avstanden til origo er 1."

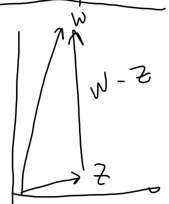
Så sirkel m/ radius 1.

B) $\{z \mid |z-1| < 2\}$



"Intuisjon"

Siden vektoren mellom w og z er $w-z$ (fra tegning) er avstand mellom w og z gitt v/ $|w-z|$

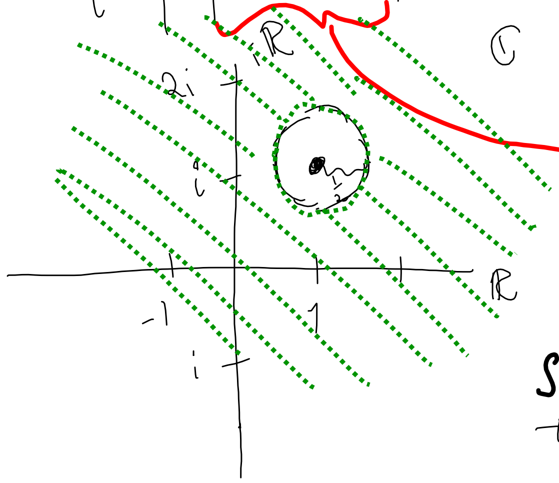


Svaret: innholdet i sirkelen (ikke randen/kanten)

c) $\{z \mid |\overset{z}{z} - \overbrace{(i+1)}^{w}| \geq \frac{1}{2}\}$

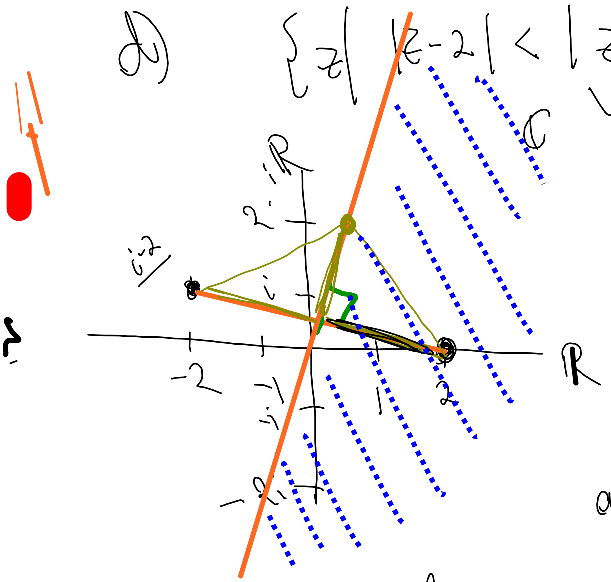
"på norsk" Alle z s.a. avstanden mellom z og $1+i$ er større eller lik $\frac{1}{2}$.

Avstanden mellom z og w.



Så mengden består av alle cplx tall på sirkelen og utenfor.

d) $\{z \mid |z-2| < \underbrace{|z-i+2|}_{=|z-(i-2)|}\}$



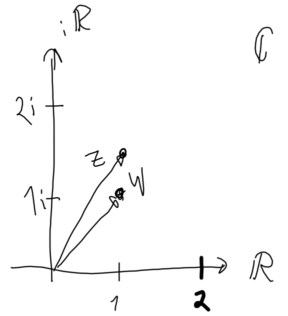
Siden $|z-w|$ er avstanden mellom z og w, så ønsker vi alle punkter som er nærmere 2 enn $i-2$.

Alle punkter på linja har samme avstand til 2 og $i-2$.

Fordi er du på linja, lager du to like trekanter m/ samme hypotenus (like fordi grunnlinje og høyde er like)

Så svaret = alle punkter strengt på høyresiden av linjen.

3.2.13 $z = 1 + i\sqrt{3}$ $w = 1 + i$



a) Regn ut zw og $\frac{z}{w}$:

$$zw = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)$$
$$= (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$$

$$\frac{z}{w} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$$

ganger m/ konjugerte av nevner

Husk at $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$ (når $z = a + ib$)

$$= \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{1 + 1}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})}{2}$$

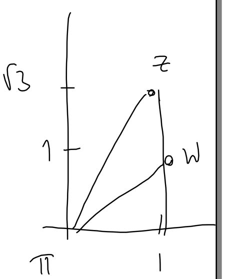
$$= \underline{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}}$$ ✓

(den ivrige leser kan tegne disse inn i $\mathbb{C}$)

b) Skriv z og w på polarform.

$$z = re^{i\theta}$$

lengden til z → r; vinkelen → θ (i radianer; så $2\pi = 360°$)



- Ser at z lager rettvinklet trekant m/ vinkel $60° = \frac{\pi}{3}$. (evt. $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$)

m/ lengde $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Så $z = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

w er enklere:

Siden høyde = lengde, er vinkelen $45° = \frac{\pi}{4}$.

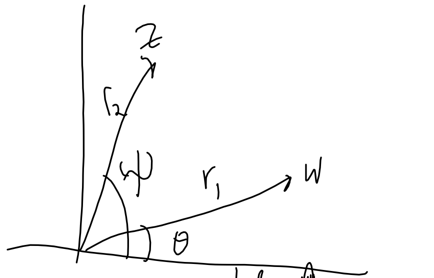
Og lengde $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Så $$w = \underbrace{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{eksponentialform}} = \underbrace{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{polarform}}$$

sep 9-09:14

c) Bruk svarene i b) til å finne polarformen til $\frac{z}{w}$.

Bruker Teorem 3.2.3 som sier at vinklene til to komplekse tall delt på hverandre er differansen mellom vinklene.



Da har $\frac{z}{w}$ vinkel $\psi - \theta$ og lengde $\frac{r_2}{r_1}$.

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{og} \quad w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \cancel{\frac{2\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Men fra a) er jo $\frac{z}{w}$ lik

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$\sqrt{2}$ ↓

Sammenligner real- og imaginærdeler:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{\pi}{12} \\[2ex] \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{12} \end{cases}$$

Så $\cos\frac{\pi}{12} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (fjerner $\sqrt{2}$ fra nevner)

og $\sin\frac{\pi}{12} = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ✓

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

sep 9-09:36

3.2.15 V.a. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Hint $|z|^2 = z\bar{z}$

$$(z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)}$$

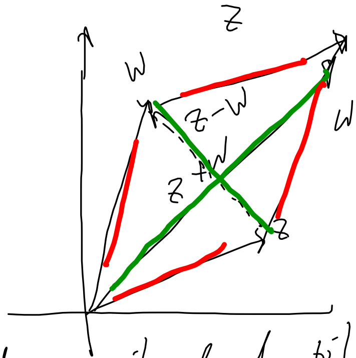
$$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= 2|z|^2 + 2|w|^2. \quad \checkmark$$

Fra tegning

summen av kvadratene til sidene i parallellogrammet



$|z+w|^2 + |z-w|^2$ = summen av kvadratene til lengden til diagonalene.

$$\bullet^2 + \bullet^2 + \bullet^2 + \bullet^2 = \bullet^2 + \bullet^2$$