

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus  
Eksamensdag: Onsdag 6. desember 2017  
Tid for eksamen: 14.30 – 18.30  
Oppgavesettet er på 3 sider.  
Vedlegg: Formelark  
Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

*Alle punktene (1a, 1b, 2 osv.) teller i utgangspunktet likt i sensuren. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk å begrunne svarene dine.*

### Oppgave 1

I denne oppgaven er  $f$  funksjonen

$$f(x, y) = xe^{xy}$$

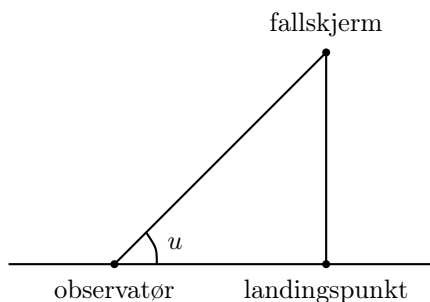
- Finne de partiellderiverte til  $f$ .
- I hvilken retning vokser  $f$  raskest når vi befinner oss i punktet  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ? La  $\mathbf{u}$  være enhetsvektoren i denne retningen, og finn den retningsderiverte  $f'(\mathbf{a}; \mathbf{u})$ .

### Oppgave 2

Hva er volumet til parallelepipedet utspent av vektorene  $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$  og  $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$ ?

### Oppgave 3

Figuren viser en fallskjerm som faller loddrett mot bakken. Fallet observeres av en observatør som står 100 meter fra landingspunktet. Når vinkelen  $u$  er  $\frac{\pi}{4}$ , endrer den seg med 0.03 radianer per sekund. Hvor fort faller fallskjermen i dette øyeblikket?



(Fortsettes på side 2.)

**Oppgave 4**

En gruppe på 2000 velgere blir studert i forbindelse med et valg. De kan stemme på tre partier,  $P$ ,  $Q$  og  $R$ . I en spørreundersøkelse to måneder før valget blir de spurt om hvilket parti de tror de kommer til å stemme på, og resultatet her blir senere sammenlignet med hvordan de faktisk stemte under valget. Undersøkelsen viser at:

- (i) Av dem som sa de ville stemme på  $P$  i undersøkelsen, stemmer 70% på  $P$ , 20% på  $Q$  og 10% på  $R$  i valget.
- (ii) Av dem som sa de ville stemme på  $Q$  i undersøkelsen, stemmer 20% på  $P$ , 70% på  $Q$  og 10% på  $R$  i valget.
- (iii) Av dem som sa de ville stemme på  $R$  i undersøkelsen, stemmer 20% på  $P$ , 20% på  $Q$  og 60% på  $R$  i valget.

- a) Anta at det var henholdsvis  $x_1$ ,  $x_2$  og  $x_3$  velgere som sa de ville stemme på partiene  $P$ ,  $Q$  og  $R$  i spørreundersøkelsen. Finn en matrise  $A$  slik at hvis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

så er  $y_1$ ,  $y_2$  og  $y_3$  antall velgere som stemte på henholdsvis  $P$ ,  $Q$  og  $R$  ved valget.

- b) Den inverse matrisen til  $A$  er

$$B = \begin{pmatrix} 1.6 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.6 & -0.4 \\ -0.2 & -0.2 & 1.8 \end{pmatrix}$$

(du behøver ikke sjekke at dette stemmer). Ved valget var det 800 velgere som stemte på  $P$ , 700 som stemte på  $Q$ , og 500 som stemte på  $R$ . Hvor mange var det som sa de ville stemme på henholdsvis  $P$ ,  $Q$  og  $R$  i spørreundersøkelsen?

**Oppgave 5**

Regn ut integralene:

a)  $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

b)  $\int \frac{1}{x^2+6x+18} dx$

**Oppgave 6**

- a) Funksjonen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er definert ved

$$g(x) = e^{-x} \sin(e^x)$$

Vis at  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , men at  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$  ikke eksisterer.

(Fortsettes på side 3.)

I resten av oppgaven antar vi at  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  er to ganger deriverbar med kontinuerlig annenderivert.

- b) Vis at dersom  $b$  er en konstant, så er den deriverte til  $f(x) + f'(x)(b-x)$  lik  $f''(x)(b-x)$ . Bruk dette til å vise at

$$\int_a^b f''(x)(b-x) dx = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)$$

- c) I resten av oppgaven antar vi at det finnes et positivt tall  $M$  slik at  $|f''(t)| \leq M$  for alle  $t$ . Vis at for  $b > a$ , er

$$\frac{1}{2}M(b-a)^2 \geq |f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)|$$

og forklar at dette medfører at

$$|f(b) - f(a)| \geq \left( |f'(a)| - \frac{1}{2}M(b-a) \right) (b-a)$$

- d) Anta at  $\epsilon > 0$ . Vis at dersom  $|f'(a)| \geq \epsilon$  og  $b = a + \frac{\epsilon}{M}$ , så er  $|f(b) - f(a)| \geq \frac{\epsilon^2}{2M}$ . Bruk dette til å vise at dersom  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  og  $f''$  er begrenset, så er  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .

SLUTT