MAT1100 H17: Løsningsforslag til oblig 1

Oppgave 1 a) Vi utvider brøken med den konjugerte av nevneren:

$$\frac{2+3i}{4-i} = \frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{2\cdot 4 + 2i + (3i)\cdot 4 + 3i^2}{4^2 - i^2}$$

$$= \frac{8+2i+12i-3}{16+1} = \frac{5+14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

b) Bruker regneregler for konjugasjon:

$$\overline{(1+3i)(2-i)} = \overline{(1+3i)}\cdot\overline{(2-i)} = (1-3i)(2+i)$$

$$= 1\cdot 2 + i - (3i)\cdot 2 - 3i^2 = 5 - 5i$$

Oppgave 2 a) Vi har $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$. Videre er

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siden z ligger i annen kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

b) Ved De Moivres formel er

$$z^{34} = r^{34}(\cos\theta + i\sin\theta)^{34} = r^{34}(\cos(34\theta) + i\sin(34\theta))$$

$$= 2^{34}\left(\cos\left(34\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(34\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Vi ser at $34\cdot\frac{2\pi}{3} = 33\cdot\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 11\cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, så

$$\cos\left(34\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

og

$$\sin\left(34\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dermed er

$$z^{34} = 2^{34}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{33}(-1 + i\sqrt{3})$$

Oppgave 3 a) Vi faktoriserer ut høyeste potens i teller og nevner:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n-1}{4n^3-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^3(4-\frac{7}{n^3})} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{(4-\frac{7}{n^3})} = \frac{3}{4}$$

b) Også her faktoriserer vi ut høyeste potens:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4+n^2-n}{3n^3-7n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(4n+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^3(3-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{4+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}} = \infty$$

der vi bruker at den første faktoren, n, går mot ∞, og at den andre faktoren, $\frac{4+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^3}}$, går mot $\frac{4}{3}$.

c) Vi utvider brøken med den konjugerte til $\sqrt{n^3+7n^2}-\sqrt{n^3}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+7n^2}-\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^3+7n^2}-\sqrt{n^3})(\sqrt{n^3+7n^2}+\sqrt{n^3})}{\sqrt{n}(\sqrt{n^3+7n^2}+\sqrt{n^3})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+7n^2-n^3}{\sqrt{n}\left(n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{7}{n}}+n^{\frac{3}{2}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n^2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1\right)} = \frac{7}{2}$$

Oppgave 4 a)Vi vet at $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Altså er $|z| = 1$ hvis og bare hvis $z\bar{z} = 1$.

b) For å komme fra origo til et punkt på tangenten må vi først gå langs z (tenk på z som en vektor), og så snu 90° og følge en vektor som står normalt på z. En slik vektor er iz, siden multiplikasjon med i roterer et komplekst tall 90°. Etter å ha gått en stund langs tangenten er vi da i et punkt på formen $w = z + tiz = z(1+it)$, der $t \in \mathbb{R}$.

For å vise ekvivalensen antar vi først at $w = z(1+it)$ for $t \in \mathbb{R}$. Da er (husk at $z\bar{z} = 1$ siden z ligger på enhetssirkelen):

$$w + z^2\bar{w} = z(1+it) + z^2\cdot\overline{z(1+it)} = z(1+it) + z\cdot(z\overline{z})(1-it)$$

$$= z(1+it) + z(1-it) = 2z$$

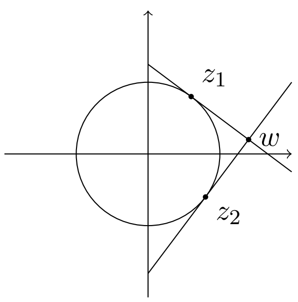
Anta så at w ikke er av formen $z(1+it)$ for et reelt tall t. Vi har fortsatt at $w = z(1+it)$ for et *ikke-reelt* komplekst tall t (for å se dette kan man f.eks. løse ligningen $w = z(1+it)$ mhp. t). Gjør vi den samme regningen som ovenfor, får vi nå

$$w + z^2\bar{w} = z(1+it) + z^2\cdot\overline{z(1+it)} = z(1+it) + z\cdot(z\overline{z})\overline{(1+it)}$$

$$= z(1+it) + z(1-i\bar{t}) = 2z + i(t-\bar{t})$$

Siden t ikke er reell, er $t - \bar{t} \neq 0$, og dermed er $w + z^2\bar{w} \neq 2z$.

c) Figuren viser hvordan tangenten gjennom z_1 skjærer tangenten gjennom z_2 i w. Hvis $z_1 = -z_2$, er z_1 og z_2 diametralt motsatte punkter på sirkelen. Tangentene er da parallelle og skjærer hverandre ikke.



Siden w skal ligge både på tangenten gjennom z_1 og tangenten gjennom z_2, må den ifølge forrige punkt tilfredsstille begge ligningene

$$w + z_1^2\bar{w} = 2z_1$$

og

$$w + z_2^2\bar{w} = 2z_2$$

Vi løser dette ligningssystemet for w ved å eliminere $\bar{w}$: Først ganger vi den øverste ligningen med z_2^2 og den nederste med z_1^2:

$$z_2^2 w + z_1^2 z_2^2 \bar{w} = 2z_1 z_2^2$$

$$z_1^2 w + z_1^2 z_2^2 \bar{w} = 2z_1^2 z_2$$

Så trekker vi den øverste ligningen fra den nederste:

$$(z_1^2 - z_2^2)w = 2z_1 z_2(z_1 - z_2)$$

Dette gir $w = \frac{2z_1 z_2(z_1 - z_2)}{(z_1^2 - z_2^2)} = \frac{2z_1 z_2}{(z_1 + z_2)}$