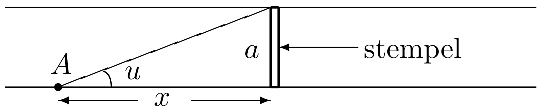
MAT1100 H17: Løsningsforslag til oblig 1

Oppgave 1: a) Ifølge læreboken er $\cot u = \frac{1}{\tan u}$, og fra figuren ser vi at $\tan u = \frac{a}{x}$. Dermed er

$$\cot u = \frac{1}{\tan u} = \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{x}{a}$$



b) Deriverer vi begge sider av ligningen $\cot u(t) = \frac{x(t)}{a}$ mhp. t, får vi

$$-\frac{1}{\sin^2 u(t)} u'(t) = \frac{x'(t)}{a}$$

der vi har brukt kjerneregelen på venstre side. Ganger vi uttrykket med $-\sin^2 u(t)$, får vi

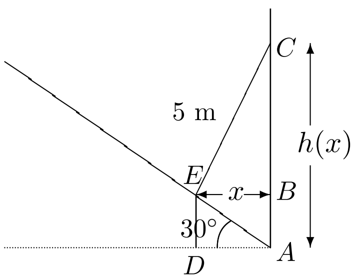
$$u'(t) = -\frac{\sin^2 u(t)}{a} x'(t)$$

c) I løpet av 2 sekunder flytter stemplet seg 10 cm. Det betyr at $x = 10$ i det øyeblikket vi er interessert i. Dermed er $\cot u = \frac{10}{10} = 1$, som betyr at $u = \frac{\pi}{4}$. Setter vi inn i formelen fra b), får vi nå at

$$u' = -\frac{\sin^2 \frac{\pi}{4}}{10} \cdot 5 = -\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{10} \cdot 5 = -\frac{\frac{1}{2}}{10} \cdot 5 = -0.25$$

Dette betyr at vinkelen avtar med 0.25 radianer i sekundet i det øyeblikket vi ser på.

Oppgave 2: a) Ser vi på figuren, er det naturlig å dele $h(x)$ i to deler: Linjestykket AB og linjestykket BC.



Lengden til BC er $\sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$ ifølge Pytagoras' setning. Linjestykket AB er like langt som linjestykket DE på figuren, og vi har

$$\frac{|DE|}{x} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dermed blir $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. I alt har vi dermed

$$h(x) = |AB| + |BC| = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{25 - x^2}$$

b) Deriverer vi uttrykket i a), får vi

$$h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Dette betyr at den deriverte er null når $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, dvs. når

$$\sqrt{3}\sqrt{25 - x^2} = 3x$$

Kvadrerer vi på begge sider, får vi at

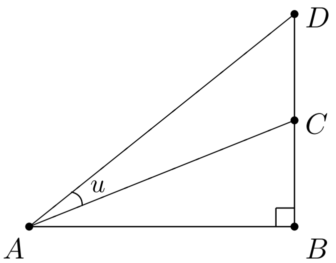
$$75 - 3x^2 = 9x^2,$$

som gir $x^2 = \frac{75}{12} = \frac{25}{4}$. Siden x må være positiv, betyr dette at $x = \frac{5}{2}$. Det er lett å sjekke at dette gir et maksimumspunkt for funksjonen $h(x)$ på intervallet $[0, 5]$. Stigebunnen må altså plasseres 2.5 meter ut fra muren for å nå så høyt opp som mulig.

c) Vi ser først på trekanten BCE på figuren i b). Den viser at $\sin \angle BCE = \frac{x}{5}$. I vårt tilfelle er $x = \frac{5}{2}$, og vi får $\sin \angle BCE) = \frac{1}{2}$, som tilsier at $\angle BCE = 30°$. Flytter vi nå blikket til trekanten ACE, ser vi at $\angle EAC = 60°$ og $\angle ACE = 30°$. Dermed er det $90°$ igjen til vinkel $\angle AEC$. (Dette punktet kan også løses på mange andre måter, det er f.eks. mulig å argumentere rent geometrisk uten å bruke resultatene i a) og b).)

Oppgave 3: a) Fra figuren ser vi at

$$u = \angle BAD - \angle BAC$$



Videre er

$$\tan(\angle BAD) = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{y}{a}$$

og

$$\tan(\angle BAC) = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{x}{a}$$

Dette betyr at $\angle BAD = \arctan \frac{y}{a}$ og $\angle BAC = \arctan \frac{x}{a}$, og følgelig er

$$u = \arctan \frac{y}{a} - \arctan \frac{x}{a}$$

b) Deriverer vi begge sider av likheten

$$u(t) = \arctan \frac{y(t)}{a} - \arctan \frac{x(t)}{a}$$

mhp. t, får vi

$$u'(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y(t)}{a}\right)^2} \cdot \frac{y'(t)}{a} + \frac{1}{1 + \left(\frac{x(t)}{a}\right)^2} \cdot \frac{x'(t)}{a}$$

$$= \frac{ay'(t)}{a^2 + y(t)^2} - \frac{ax'(t)}{a^2 + x(t)^2}$$

c) Setter vi inn i formerlen fra b), får vi

$$u'(t) = \frac{ay'(t)}{a^2 + y(t)^2} - \frac{ax'(t)}{a^2 + x(t)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 10}{1 + 2^2} - \frac{1 \cdot 10}{1 + 1^2} = \frac{10}{5} - \frac{10}{2} = 2 - 5 = -3$$

Dette betyr at vinkelen avtar med 3 radianer i timen i det øyeblikket vi ser på.